平成19年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

数学

平成19年2月 6日

10:00〜12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 2問すべてに答えよ. 問いごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following two problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること

受験番号	No.

問題 1(100 点).
次のような式表現をもつ 2 次曲面を考える．

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy = 4 \qquad [1]$$

以下の問いに答えよ．

(1) 次のようにベクトル $\boldsymbol{p}$ を定義する．

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

このとき，式 [1] の左辺が $\boldsymbol{p}^\top M \boldsymbol{p}$ となるように 3×3 の実対称行列 M を定めよ．

(2) M の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3)$ と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ とを求めよ．ただし，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は単位ベクトルでもあるとする．

(3) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が正規直交基底をなすことを示せ．

(4) $M = Q^{-1} D Q$ を満たすような行列 Q と対角行列 D とを求めよ．

(5) 新しい座標系

$$\boldsymbol{r} = Q\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，式 [1] は新しい座標系でどのように表現されるかを示せ．また，新しい座標系による表現により，式 [1] はどのような種類の 2 次曲面を表現しているかを答えよ．

Problem 1(100 points).

Consider a quadratic curve represented as

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy = 4. \qquad [1]$$

Answer the following questions.

(1) Define vector $\boldsymbol{p}$ as

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Determine the 3×3 real symmetric matrix M with which the left-hand side of equation [1] is represented as $\boldsymbol{p}^\top M \boldsymbol{p}$.

(2) Obtain the eigenvalues λ_1, λ_2, and λ_3 ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$), and the corresponding eigenvectors $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, and $\boldsymbol{u}_3$ of M. Here, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, and $\boldsymbol{u}_3$ should be unit vectors.

(3) Show that $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, and $\boldsymbol{u}_3$ form an orthonormal basis.

(4) Determine a matrix Q and a diagonal matrix D that give $M = Q^{-1}DQ$.

(5) Consider a new coordinate system

$$\boldsymbol{r} = Q\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Show how the equation [1] is represented in the new coordinate system. Answer which kind of quadratic curve the equation [1] represents, by using the representation in the new coordinate system.

問題 2(100 点).
双曲線正弦 (サイン)・余弦 (コサイン) 関数は

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

で定義される．以下の問いに答えよ．

(1) 双曲線正弦 (サイン)・余弦 (コサイン) 関数の微分

$$\frac{d\sinh x}{dx}$$

$$\frac{d\cosh x}{dx}$$

を求めよ．

(2) cosh の逆関数を arcosh とする (ここでは $x > 1$ に対し $\operatorname{arcosh} x > 0$ とする)．

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

および $x > 1$ に対し

$$\frac{d\operatorname{arcosh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

を示せ．

(3) 非負整数 k に対して $T_k(x) = \cosh(k \operatorname{arcosh} x)$ とする．$g = T_k(x)$ が微分方程式

$$(1-x)^2 g'' - xg' + k^2 g = 0$$

の解であることを示せ．

(4) 加法定理

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

を示し，それを使って漸化式

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ 2T_1(x)T_k(x) &= T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) \qquad \text{for } k = 1, 2, \cdots\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．

(5) $T_k(x)$ が次数 k の多項式であることを示せ．

Problem 2(100 points).
Hyperbolic sine and cosine are defined as follows.

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2},\\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Answer the following questions.

(1) Calculate the derivatives of hyperbolic sine and cosine:

$$\frac{d\sinh x}{dx}$$

$$\frac{d\cosh x}{dx}$$

(2) Let the inverse function of cosh be arcosh (here let $\operatorname{arcosh} x > 0$ for $x > 1$). Show that

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

and that for $x > 1$

$$\frac{d \operatorname{arcosh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(3) Let $T_k(x) = \cosh(k \operatorname{arcosh} x)$ where k is a non-negative integer. Show that $g = T_k(x)$ is a solution of the differential equation

$$(1-x)^2 g'' - xg' + k^2 g = 0.$$

(4) Show that

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

and that

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1,\\ T_1(x) &= x,\\ 2T_1(x)T_k(x) &= T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) \qquad \text{for } k = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

(5) Show that $T_k(x)$ is a polynomial of degree k.

平成19年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 I

平成19年2月 7日

10:00〜12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3問すべてに答えよ. 問いごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following three problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1(100 点).

0 以上 1 以下の理想的な実数乱数を出力する機械 X を考える．なお，機械 X の乱数の精度は十分あるため，この機械が全く同じ値を 2 度出力する確率は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 機械 X を 2 回動作させてそのうち小さい方の値を x とおく．x が 0.5 以下となる確率を求めよ．

(2) 機械 X をまず 2 回動作させ，(1) と同様に小さい方の値を x とおく．更に機械 X を 2 回動作させ，今度は大きい方の値を y とおく．このとき $x < y$ となる確率を求めよ．

(3) 機械 X を 4 回動作させ，(2) と同様に 2 つの値 x，y を得る．このとき $x < y$ ならば `A`，そうでなければ `B` を出力することを考える．
これを n 回繰り返すと，長さ n の文字列 $s \in \{\mathtt{A},\mathtt{B}\}^n$ を得ることができる．こうして得られた文字列 s を何らかの圧縮アルゴリズムを用いて圧縮したい．このときその圧縮サイズの期待値の下限について論じよ．なお，議論の中で必要に応じて以下の概略値を用いてもよい．

数式	概略値
$\log_2 3$	1.585
$\log_2 5$	2.322
$\log_2 7$	2.807
$\log_2 11$	3.459
$\log_2 13$	3.700

Problem 1(100 points).

Machine X outputs ideally random real numbers which are larger than 0 or equal to 0, and less than 1 or equal to 1. We can ignore the probability that two same numbers are output by X, as the output numbers are precise enough. Answer the following questions.

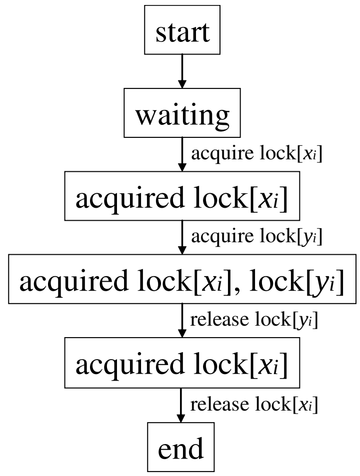
(1) Consider two random numbers that are output by X, and let x be the smaller value of them. Calculate the probability that x is less than or equal to 0.5.

(2) As in (1), let x be the smaller value of two random numbers output by X. Furthermore, consider two more random numbers also output by X, and let y be the larger value of them. Calculate the probability that $x < y$.

(3) Consider a routine that gets two values x and y from 4 random numbers output by X as in (2), and outputs `A` if $x < y$, or `B` otherwise. If we repeat this routine n times, we can get a string $s \in \{\texttt{A},\texttt{B}\}^n$ of length n. We want to compress the obtained string s by some compression algorithm. Discuss the infimum of the expected size of the compressed data. You can use the following approximate values in the discussion.

expression	approximate value
$\log_2 3$	1.585
$\log_2 5$	2.322
$\log_2 7$	2.807
$\log_2 11$	3.459
$\log_2 13$	3.700

問題 2(100 点).
n を 2 以上の整数とし，1 から n までの整数値を取りうる，2 つのパラメータを持つ n 個の並行プロセス $P(x_i, y_i)(i = 1, \ldots, n; x_i, y_i \in \{1, \ldots, n\})$ が，n 個のリソースを共有して動作するシステムを考える．ここで各 $P(x_i, y_i)$ の動作は，以下の図のようなオートマトンで表される．



ただし，lock$[j](j = 1, \ldots, n)$ は，それぞれ各リソースに対するロックであり，acquire および release は，それぞれ状態遷移の際に，ロックを獲得，および解放することを示す．1 つのロックに対し，同時にそのロックを獲得できるプロセスは 1 つしかなく，獲得しようとする他のプロセスは，そのロックが解放されるまで待つ必要がある．

また，パラメータは次の条件を満たすものとする．

- 各 $k = 1, \ldots, n$ に対し，$x_k \neq y_k$

以下の問いに答えよ．

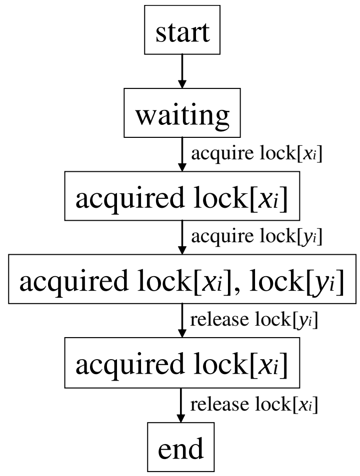
(1) 本システムにはデッドロックの可能性があることを，次のような有向グラフを構成することにより証明せよ．

> 各パラメータ $(x_i, y_i)(i = 1, \ldots, n)$ を，頂点 x_i から頂点 y_i への有向リンクと考えて，全てのプロセスのパラメータを利用し，1 から n までの整数を頂点とする有向グラフ

(2) デッドロックが生じないようにするためには，パラメータの取り得る値にどのような条件を与えれば良いか示せ．ただし，使用するリソースの数を制限してはいけない．

(3) 問い (2) で答えた条件によりデッドロックが生じないことを証明せよ．

Problem 2(100 points).
Assume that n processes with two parameters x_i and y_i $P(x_i, y_i)(i = 1, \ldots, n; x_i, y_i \in \{1, \ldots, n\})$, sharing n resources, run concurrently, where n is an integer whose value is at least two. The behavior of each $P(x_i, y_i)$ is represented by the automaton shown below.



In the above figure, lock[j]($j = 1, \ldots, n$) is the lock for each resource. The symbols "acquire" and "release" represent that the process acquires and releases the lock respectively on a transition. A lock is only acquired by one process at a time, and other processes, that acquire the lock, wait until the lock is released.

The parameters are assumed to satisfy the following conditions.

- For each $k = 1, \ldots, n$, $x_k \neq y_k$

Answer the following questions.

(1) Prove that this system has the possibility of deadlocks by considering the following directed graph.

> The directed graph whose vertices are all the integers from one to n and whose edges are all the parameters of the processes, regarding each parameter $(x_i, y_i)(i = 1, \ldots, n)$ as a directed edge from the vertex x_i to the vertex y_i

(2) Modify the parameters so that this system never causes the deadlock status. Note that the number of resources used by processes should not be limited.

(3) Prove that the system never causes the deadlock status using the parameters answered in question (2).

問題 3(100 点).
一人ゲームにおける状態空間の探索を考える．状態 s の評価関数 f を，

$$f(s) = g(s) + h(s)$$

で与える．ここで，$g(s)$ を初期状態から状態 s に至るまでのコスト，$h(s)$ を状態 s から目標状態に至るまでにかかる最小コストの推定値とする．以下の問いに答えよ．

(1) Best-First Search(最良探索) とは，どのような探索法かを説明せよ．

(2) Depth-First Search(縦型探索)，Breadth-First Search(横型探索) は，問い (1) の $g(s)$，$h(s)$ を適宜あるものと置き換えた特殊な Best-First Search と考えられる．それぞれどのようなものと置き換えればよいか，説明せよ．

(3) 初期状態から目標状態に至るまでのコストが最小になるパスを最適解とし，そのような最適解を Best-First Search で求める方法を A*アルゴリズムという．A*アルゴリズム が最適解を求めることを保証するためには $h(s)$ がどのような性質を持たなければならないか，説明せよ．

(4) Iterative Deepening(反復深化法) とは何かを簡単に説明し，それを A*アルゴリズムに適用した場合，どのようなアルゴリズムになるかを説明せよ．

Problem 3(100 points).
Consider a search through the state space in a one-person game. An evaluation function $f(s)$ is defined for state s as

$$f(s) = g(s) + h(s)$$

where $g(s)$ is actual cost from the initial node to node s, and $h(s)$ is estimated minimum cost from state s to a goal state.

Answer the following questions.

(1) Explain the Best-First search strategy.

(2) Depth-First search and Breadth-First search can be seen as special kinds of Best-First search by changing $g(s)$ and $h(s)$ to something else. Explain how $g(s)$ and $h(s)$ should be changed in each case.

(3) An optimal solution is defined as a path whose cost from the initial state to the goal state is the minimum. An algorithm to find such an optimal solution using Best-First search is called A* algorithm. Explain what kind of property $h(s)$ needs to satisfy in order to guarantee that A* algorithm finds the optimal solution.

(4) Explain a search strategy called Iterative Deepening. Describe how A* algorithm can be combined with Iterative Deepening.

平成19年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 II

平成19年2月 7日

13:30〜16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3問すべてに答えよ. 問いごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following three problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1(100 点).
2 分探索木で整数データの集合を表現する場合を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 2 分探索木とはどのようなときに使うべきデータ構造であるか説明せよ．特にヒープおよびハッシュと比較して説明せよ．

(2) 8 個の整数 $\{34, 51, 23, 11, 89, 39, 77, 21\}$ をこの順で挿入したときにできる 2 分探索木を図示せよ．

(3) 上の木から 2 つの整数 $\{51, 23\}$ をこの順に削除した後にできる 2 分探索木を図示せよ．

(4) n 個の整数を順に挿入したときに，木の高さが n になるのはどのような場合か，説明せよ．

(5) 1 から n の整数をランダムな順に挿入したときに，平均の木の高さが $O(\log n)$ であることを示せ．

Problem 1(100 points).
Consider a binary search tree for storing a set of integer values. Answer the following questions.

(1) In what kind of situations one should use a binary search tree. Explain it, comparing with heap and hashing.

(2) Show the structure of a binary tree after inserting eight integer values $\{34, 51, 23, 11, 89, 39, 77, 21\}$ in this order as a diagram.

(3) Show the structure of the above binary tree after deleting two integer values $\{51, 23\}$ in this order as a diagram.

(4) In what situations does the height of a binary tree become n after inserting n integer values?

(5) Show that the average height of a binary tree after inserting n integer values $\{1...n\}$ in a random order is $O(\log n)$.

問題 2(100 点).

2 次元空間における両眼立体視の問題を考える．2 次元空間の直交座標系を (x, z) とする．2 つのピンホールカメラが設置されており，それらのピンホールの位置を $(\pm d, 0)$，撮像面は x 軸に平行で $(0, -f)$ を通る直線上であるとする (下図参照)．左カメラの撮像面上の 1 次元座標系を u， 右カメラの撮像面上の 1 次元座標系を v とし，それぞれの原点は $(-d, -f)$ および $(d, -f)$ で，向きは空間座標系の x 軸と逆向きとする．

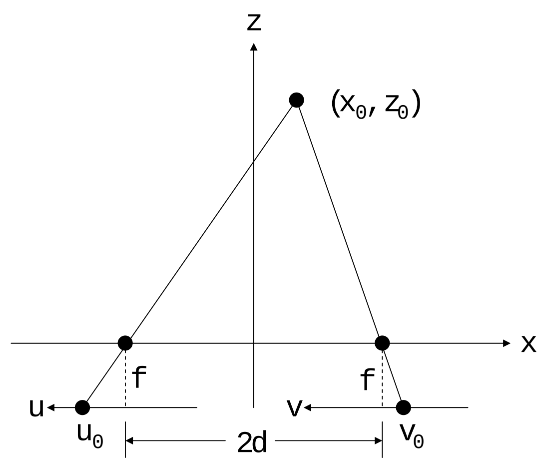
以下の問いに答えよ．

(1) 2 次元空間のある点 (x_0, z_0) の左カメラにおける投影点 u_0 を求めよ．

(2) 点 (x_0, z_0) の右カメラにおける投影点を v_0 としたとき，視差 $\gamma = u_0 - v_0$ を求めよ．

(3) 左右のカメラの撮像面は 1 cm あたり 256 ピクセルからなるとする．
また，焦点距離 $f = 5$ cm，左右のカメラ距離 $2d = 10$ cm とする．このとき，視差が 1 ピクセルとなるような点の z 座標を求めよ (これを精度限界という)．

(4) 視差の測定値に ± 1 ピクセルの誤差があるとき，特徴点 (x_0, z_0) の推定値の z 方向の誤差を評価せよ．なお，撮像系の諸条件は問い (3) のものを使用する．



Problem 2(100 points).

Consider a binocular-stereo system in a two dimensional space. Let (x, z) be the orthogonal coordinate system of the two dimensional space. Two pin-hole cameras are located so that the pin-holes are at $(\pm d, 0)$ and the image planes are on the line parallel to the x axis and across the point $(0, -f)$ (see the figure below). Let u be a one-dimensional coordinate system on the image plane of the left camera, and v be that of the right camera. The origins of u and v are located at $(-d, -f)$ and $(d, -f)$, respectively, and their positive directions are the inverse directions of the x axis of the spacial coordinate system.

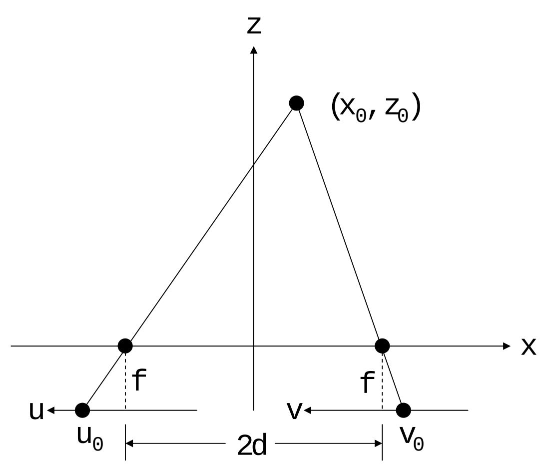
Answer the following questions.

(1) Calculate the projection point u_0 of a spatial point (x_0, z_0) in the left camera coordinate system.

(2) Let v_0 be the projection point of (x_0, z_0) in the right camera. Obtain the disparity $\gamma = u_0 - v_0$.

(3) Suppose that the image planes of the left and the right cameras have 256 pixels per 1 cm. Also assume that the focal length $f = 5$ cm and the camera distance $2d = 10$ cm. Calculate the z coordinate of a point having the disparity of 1 pixel. (It is called the measurement limitation.)

(4) Assume that we have errors of ± 1 pixel in measuring disparity. Estimate the error in measurement of z direction for a spatial point (x_0, z_0). Use the same values for the dimensions of the system as in question (3).



問題 3(100 点).
プロセッサの命令設計に関して，以下の問いに答えよ．

(1) 1) 1 オペランド命令形式，2) 2 オペランド命令形式，および 3) 3 オペランド命令形式を説明せよ．

(2) 深いパイプラインを用いたプロセッサ設計において，1 オペランド命令と 2 オペランド命令の速度低下を防止する方法を述べよ．

(3) プログラムのサイズを小さくするためにはどの形式が有効であるか，例を用いて論ぜよ．

Problem 3(100 points).
Answer the following questions on the design of instruction set architecture of a processor.

(1) Explain 1) single operand instruction format, 2) 2-operand instruction format, and 3) 3-operand instruction format.

(2) Describe a method to prevent performance degradation of 1-operand instruction and 2-operand instruction on a deep pipelined processor.

(3) Which instruction format is good to reduce the size of a program ? Explain the reason using an example program.