組合せ凸多面体論と最適化を応用した量子状態の非局所性に基づく分類手法の開拓

特別研究員 伊藤剛志
情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻

概 要

量子状態の非局所性は，その量子状態が実質的には古典状態でシミュレートできるか，真に量子的であるかを調べるための一つの指標であり，Bell 不等式と呼ばれる不等式群の破れとして定式化される．Bell 不等式は相関多面体と呼ばれる高次元の凸多面体の面に対応することが知られている．本研究では，相関多面体が組合せ最適化の分野で盛んに研究されているカット多面体という凸多面体と密接に関わることを利用して，カット多面体の面から Bell 不等式を構成する統一的な方法を提案し，また逆に Bell 不等式の分野で知られる予想からカット多面体の面の性質を示す．また，Bell 不等式が量子状態の非局所性を捉える能力の強弱を調べるときに現れる双線形半定値計画問題での数値誤差の影響を減らす工夫についても述べる．

1　はじめに

Bell 不等式は非局所性を調べるための重要な道具であり，盛んに研究されている [7]．Bell 不等式は相関多面体 [6] と呼ばれる高次元の凸多面体の面を表す不等式として自然に定義される．相関多面体に似た多面体は組合せ最適化の分野でも現れ，組合せ最適化で盛んに研究されているカット多面体 [4] との密接な関係が知られている．カット多面体の面については多くのことがわかっており，例えばカット多面体は hypermetric 不等式という統一された形で記述できる面を数多く持つことが知られている．一方，Bell 不等式については，小さいサイズの相関多面体の面を凸包計算アルゴリズムによって網羅的に列挙することが行われているが，そこから一般化された知見を得るまでに至っている例は少ない．

Bell 不等式を用いて，ある量子状態が非局所性を持つことを示すためには，判定に用いる Bell 不等式と測定と呼ばれるパラメタをうまく選ぶ必要がある．ここで，一部の Bell 不等式の間には有用性に差があることが知られている．すなわち，ある量子状態の非局所性は，CHSH 不等式という Bell 不等式ではどんな測定を用いても示されず，I_{3322} 不等式というより有用な Bell 不等式を用いることで初めて示される [3]．この関係は Bell 不等式の必要性関係と呼ばれる．

二つの Bell 不等式の間の必要性関係を判定するためには，通常，量子状態と Bell 不等式が与えられたとき，測定だけを動かすことで非局所性を示せるかどうかという問題を解く必要がある．この問題は双線形半定値計画問題という形の最適化問題として定式化できるが，この問題の最適値は，非局所性を示せるとき正，示せないときに 0 となることが知られており，仮に双線形半定値計画問題を数値計算で解いたとしても，数値誤差で本来 0 となるべき最適値が正と判定されてしまう可能性があるという点で，数値誤差に弱い．

2　三角消去による非冗長な Bell 不等式の構成

[1] ではまず，相関多面体とカット多面体の間の関係を明示し，さらにカット多面体の面の不等式から Bell 不等式を生成するための三角消去という統一手法を提案した．特に，三角消去は不等式の非冗長性 (他の不等式の和として書けない本質的

な不等式であるという性質) を保存するので，元になるカット多面体の面の不等式の非冗長性が既に証明されている場合には，場合によって困難な Bell 不等式の非冗長性の証明を行う必要がない．既に知られているカット多面体の非冗長面の膨大なリストに三角消去を適用することで，それまで十数個しか知られていなかった非冗長な Bell 不等式を 2 億個以上生成した．また，hypermetric 不等式等に三角消去を適用することで，多くの異なる Bell 不等式を少数の式で統一的に表現する方法を与え，これらの Bell 不等式に対して一般的に成り立つ性質として Bell 不等式の包含関係という性質を定義して証明した．

3 三角消去の逆によるカット多面体の非冗長面の構成

前節の内容は，基礎分野である多面体的組合せ論におけるカット多面体の既存研究を三角消去という新しい道具と組合せて応用分野である量子情報処理の Bell 不等式の結果を示すという一方向の研究だった．しかし，逆向きの研究が可能となる場合もあった．Bell 不等式の無限列である I_{mm22} 不等式 [3] は，任意の m に対して非冗長であると予想されていたが，カット多面体の既知のどの非冗長面に対して三角消去を適用しても一般の m に対する I_{mm22} 不等式は得られない．そこで，[2] では，I_{mm22} 不等式に三角消去の逆変換を適用することでカット多面体の面の新しい一般形を導出し，この一般形で書かれる不等式が非冗長であることを示した．この結果と先の三角消去の性質を合わせることで，I_{mm22} 不等式が非冗長な Bell 不等式であることが示され，予想が解決された．

4 Bell 不等式の必要性関係の解析

1 節で述べたように，Bell 不等式の必要性関係の解析では，双線形半定値計画問題の最適値が正か 0 かの判定が必要になる．最適値が必ず 0 以上となってしまうのは，この最適化問題が目的関数値 0 を持つ自明な解を持つためである．山登り法によって非自明な解のみを探索することで，数値誤差に対する頑強性が増すことが期待される．さらに，自明な解と非自明な解を区別することで理論的な解析が容易になる場合があり，[5] ではこの区別をすることによって CHSH 不等式で 3 準位 isotropic 状態と呼ばれる特殊な量子状態の非局所性を捉えることができるかどうかを理論的に解析した．これと，三角消去によって構成した非冗長 Bell 不等式に対する数値最適化の結果を合わせて，3 準位 isotropic 状態では CHSH 不等式に対して必要性関係を持つ Bell 不等式が存在することを示した．

参考文献

[1] D. Avis, H. Imai, T. Ito, and Y. Sasaki. Two-party Bell inequalities derived from combinatorics via triangular elimination. *J. Phy. A: Math. Gen.*, 38(50):10971–10987, Nov. 2005.

[2] D. Avis and T. Ito. New classes of facets of cut polytope and tightness of I_{mm22} Bell inequalities. In *Proceedings of 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, June 2005.

[3] D. Collins and N. Gisin. A relevant two qubit Bell inequality inequivalent to the CHSH inequality. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37(5):1775–1787, Feb. 2004.

[4] M. M. Deza and M. Laurent. *Geometry of Cuts and Metrics*. Springer, May 1997.

[5] T. Ito, H. Imai, and D. Avis. Bell inequalities stronger than the CHSH inequality for 3-level isotropic states. *Phys. Rev. A*. To appear.

[6] I. Pitowsky. Correlation polytopes: Their geometry and complexity. *Math. Prog.*, 50:395–414, 1991.

[7] R. F. Werner and M. M. Wolf. Bell inequalities and entanglement. *Quantum Information and Computation*, 1(3):1–25, Oct. 2001.