1量子ビットでの純粋状態のボロノイ図

PD 大音真由美

情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻

概 要

1量子ビットの量子状態はブロッホ球と呼ばれる3次元空間を形成し，距離が量子ダイバージェンスで表現されるボロノイ図が研究されてきた．このボロノイ図は，基本的にブロッホ球の内部の点に対応する混合状態を扱う．しかし，量子ダイバージェンスに存在する対数関数のために，ブロッホ球の表面上の点に対応する純粋状態では，ボロノイ図は定義されない．本研究では，Fubini-Study距離およびBures距離で表現される純粋状態でのボロノイ図を考える．次に，混合状態から純粋状態へ極限をとることで得た量子ダイバージェンスでのボロノイ図についても示す．また，これらのボロノイ図が，ブロッホ球表面での通常のボロノイ図と等しいことを示す．

1　はじめに

量子情報理論は，量子状態の構造を扱う数理的な理論体系であり，量子状態間の尺度を距離として幾何的に表現する研究が [1] などでなされている．一方，ボロノイ図は点集合の近接関係を表現する場合に中心的な役割を果たし，多くの分野で利用されている．したがって，量子的な距離に関する量子状態のボロノイ図を用いて，量子状態の近接関係を調べることは自然なことである．すでに，[5] で，量子ダイバージェンスを距離とする混合状態のボロノイ図は示されているが，純粋状態では定義されていない．しかし，多くの量子アルゴリズムは純粋状態を用いており，純粋状態でのボロノイ図を調べることは重要なことである [4].

1量子ビットの量子状態は3次元の密度行列 $\rho \in C^{2\times 2}$ で記述され，$\rho = \rho^* \geq 0$, $\mathrm{Tr}\rho = 1$ (* は複素転置行列) の条件を満たす．ρ の rank が1であるとき，この量子状態を純粋状態といい，その他の場合は混合状態という．純粋状態 ρ, σ の Fubini-Study 距離 $d_{FS}(\rho,\sigma)$[3]，および Bures 距離 $d_B(\rho,\sigma)$[2] は，それぞれ次式で定義される．

$$\cos d_{FS}(\rho,\sigma) = \sqrt{\mathrm{Tr}(\rho\sigma)},\ 0 \leq d_{FS}(\rho,\sigma) \leq \pi/2$$
$$d_B(\rho,\sigma) = \sqrt{1-\mathrm{Tr}(\rho\sigma)}$$

$C^{N\times N}$ の密度行列 ρ の von Neumann エントロピー $S(\rho)$ は $S(\rho) = \mathrm{Tr}(-\rho\log\rho)$ である．ただし，

$$\log\rho \equiv \sum_i (\log\lambda_i)E_i, E_iE_j = \delta_{ij}E_i,\ \mathrm{Tr}(E_i) = 1$$

量子状態 ρ と σ の von Neumann エントロピーの差を示す量子ダイバージェンス $D(\rho\|\sigma)$ は $D(\rho\|\sigma) = \mathrm{Tr}(\rho\log\rho - \rho\log\sigma)$ である．ただし，σ は混合状態で，$D(\rho\|\sigma) \geq 0$ であり，$\rho = \sigma$ のときのみ $D(\rho\|\sigma) = 0$ となる．

2　1量子ビットでの純粋状態のボロノイ図

1量子ビットにおける2つの純粋状態 $\rho = \rho(x,y,z)$, $\sigma = \sigma(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ の Fubini-Study 距離 $d_{FS}(\rho,\sigma)$ と Bures 距離 d_B は,

$$\begin{aligned} d_{FS}(\rho,\sigma) &= \cos^{-1}\sqrt{(1+\cos\theta(\rho,\sigma))/2} \\ &= \theta(\rho,\sigma)/2 \\ d_B(\rho,\sigma) &= \sqrt{1/2(1-x\tilde{x}-y\tilde{y}-z\tilde{z})} \\ &= 1/2d_E((x,y,z),(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})) \end{aligned}$$

ただし，$\theta(\rho,\sigma)$ を 2 つのベクトル (x,y,z) と $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ がなす角度とし，d_E を 3 次元の Euclid 距離とする．すなわち，1 量子ビットでの 2 量子状態間の Fubini-Study 距離は，ブロッホ球上の対応する 2 点における測地線距離の半分になり，Bures 距離は Euclid 距離の半分になる．

ここで，Fubini-Study 距離および Bures 距離での 1 量子ビットの純粋状態を $\sigma_i = \sigma(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, ..., n)$ としたとき，Fubini-Study 距離での σ_i のボロノイ領域 V_{FS} は

$$V_{FS}(\sigma_i) = \bigcap_{j\neq i}\{(x,y,z) \mid \rho = \rho(x,y,z) \\ : \text{pure states}, d_{FS}(\rho,\sigma_i) \leq d_{FS}(\rho,\sigma_j)\}$$

と定義される．Bures 距離でのボロノイ領域 $V_B(\sigma_i)$ も同様に定義される．上述の結果より，次の定理がえられる．

Theorem 1 *1* 量子ビットの純粋状態において，次の *4* つのボロノイ図は等価である：

- *Fubini-Study* 距離でのボロノイ図
- *Bures* 距離でのボロノイ図
- ブロッホ球上の測地線距離でのボロノイ図
- *Euclid* 距離でのブロッホ球断面のボロノイ図

以下，量子ダイバージェンスで定義される 1 量子ビットのボロノイ図について述べる．混合状態の集合 σ'_i $(i = 1, ..., n)$ において，ボロノイ領域 $V_D(\sigma'_i)$ を定義する．

$$V_D(\sigma'_i) = \\ \bigcap_{j\neq i}\{(x,y,z) \mid \rho \in B, D(\rho\|\sigma'_i) \leq D(\rho\|\sigma'_j)\}$$

σ'_i は混合状態である必要があるが，ρ に制限はない．1 量子ビットでの混合状態の量子ダイバージェンスは $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}$ としたとき，

$$D(\rho\|\sigma) = \mathrm{Tr}(\rho\log\rho) - \frac{1}{2}\log\frac{1-\tilde{r}^2}{4} \\ -\frac{\log(1+\tilde{r}) - \log(1-\tilde{r})}{2\tilde{r}}(x\tilde{x} + y\tilde{y} + z\tilde{z})$$

ここで，純粋状態の集合 $\sigma_i = \sigma_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$ $(i = 1, ..., n)$ が与えられたとする．ある微小量 $\epsilon > 0$ を用いた $x^2 + y^2 + z^2 = (1-\epsilon)^2$ の球において，$(x'_i, y'_i, z'_i) = (1-\epsilon)(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$ で定義される $\sigma'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ のボロノイ図を考える．

与えられた純粋状態のボロノイ図 V_D を，この断面の極限 $\epsilon \to 0$ によって定義し，この図の σ_i のボロノイ領域を $V_D^{pure}(\sigma_i)$ と記述すると，

$$V_D^{pure}(\sigma_i) = \bigcap_{j\neq i}\{(x,y,z) \mid \rho \text{ on the sphere}, \\ x\tilde{x}_i + y\tilde{y}_i + z\tilde{z}_i \geq x\tilde{x}_j + y\tilde{y}_j + z\tilde{z}_j\}$$

となり，この図は定理 1 のものと同一であることがわかる．$D^*(\rho\|\sigma) \equiv D(\sigma\|\rho)$ で定義される双対量子ダイバージェンス D^* においても，同様に極限 $\epsilon \to 0$ をとったボロノイ図 $V_{D^*}^{pure}$ が定義される．

Theorem 2 純粋状態からなるボロノイ図 V_D^{pure} と $V_{D^*}^{pure}$ は，定理 *1* の図と同一である．

ただし，混合状態からなるボロノイ図 V_D と V_D^* は，一般に同一でないことが [5] で示されている．

参考文献

[1] S.-I. Amari and H. Nagaoka. *Methods of information geometry*. AMS, Oxford University Press, 2000.

[2] D. Bures. An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite ω^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 135, pp. 199–212, 1969.

[3] M. Hayashi. Asymptotic estimation theory for a finite-dimensional pure state model. *Journal of Phys. A: Mathematical and General*, Vol. 31, pp. 4633–4655, 1998.

[4] K. Kato, M. Oto, H. Imai, and K. Imai. Voronoi diagrams for pure 1-qubit quantum states. In *Proc. Int. Sym. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (VD2005)*, pp. 293–299, 2005.

[5] M. Oto, H. Imai, and K. Imai. Computational geometry on 1-qubit quantum states. In *Proc. Int. Sym. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (VD 2004)*, pp. 145–151, 2004.