計算誤差を排除した有向マトロイドの実現不可能性判定

RA 中山裕貴
情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻

概要

ある有向マトロイドに対して，対応するベクトル配置の集合が存在するとき，その有向マトロイドは実現可能であるといい，そうでないとき実現不可能という．本研究では，有向マトロイドが実現不可能となる十分条件である双二次最終多項式を用い，実現不可能な有向マトロイドの列挙を行った．

1 はじめに

実空間 $\mathbb{R}^r$ 上に配置された n 本のベクトル集合の関係を，その組合せ的性質に着目して抽象化することで得られる有向マトロイドは，実空間中の擬超平面の集合をなすことが知られている．逆に，有向マトロイドが擬超平面の集合として与えられたとき，各々の擬超平面を，お互いの関係を保ちつつ超平面に変形できるとき，有向マトロイドに対応するベクトル配置はその法線ベクトルで与えられ，有向マトロイドは実現可能であるという．

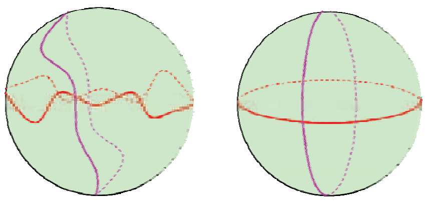

図 1 擬超平面配置（左）と超平面配置（右）

有向マトロイドが実現可能であるか判定する単純な方法としては，各ブラケットを変数と見て連立方程式

$$[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_1\lambda_2]\cdot[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_3\lambda_4]+[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_1\lambda_4]\cdot[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_2\lambda_3]=[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_1\lambda_3]\cdot[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_2\lambda_4]\quad\cdots(1)$$

（但し$\tau_{1\cdots r-2},\lambda_{1\cdots4}\in\{1,\ldots,n\}$）を解き，これが有向マトロイドの符号と一致した解を持てば有向マトロイドは実行可能であり，そうでなければ実行不可能であると判定できる．しかし，連立方程式 (1) は 2 次式であり代数的に解くことは難しく，また数値計算による手法では計算誤差が生じてしまい，正しい結果を返さない場合がある．

そこで，有向マトロイドの実現不可能性の十分条件となる性質を用い，その性質を満たすものを実現不可能な有向マトロイドと判定することを考える．そのような性質の例として，多面体の向き付けにおける Holt-Klee 条件を利用した非 HK* 性，線形計画問題の目的関数による向き付けを利用した非ユークリッド性が提案され，計算機実験が行われた[1]．これらの手法は有向マトロイドの幾何的性質に着目したものであり，計算誤差を介在させずに実現不可能性の判定を行うことができる．

2 双二次最終多項式

我々は，有向マトロイドの実現不可能性の十分条件となる性質として，代数的立場から双二次最終多項式に着目する．これは，連立方程式 (1) を緩和して線型方程式に帰着させることで，方程式の計算を容易にするものである．以下，(1) の各ブラケットの値は非負であるものとする（$\lambda_{1\ldots4}$ を適切に入れ替えることによって，この条件は必ず満たされる）．

(i) 3 つの項の符号がすべて正であるとき

左辺第 1 項（あるいは第 2 項）を消去することで，以下の形の不等式を得る．

$$[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_1\lambda_4]\cdot[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_2\lambda_3]<[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_1\lambda_3]\cdot[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_2\lambda_4]\quad\cdots(2)$$

(ii) 左辺の 2 項のいずれかが 0 であるとき

左辺の，値が 0 である項を消去することで，以下の形の等式を得る．

$$[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_1\lambda_4]\cdot[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_2\lambda_3] = [\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_1\lambda_3]\cdot[\tau_1\cdots\tau_{r-2}\lambda_2\lambda_4] \quad \cdots (3)$$

(2)(3)それぞれに対して対数をとることで，以下の連立不等式を得る．

$$\begin{array}{ccc} \log[\cdots]+\log[\cdots] & < & \log[\cdots]+\log[\cdots] \\ & \vdots & \\ \log[\cdots]+\log[\cdots] & = & \log[\cdots]+\log[\cdots] \\ & \vdots & \end{array} \quad \cdots (4)$$

各々の log[⋯] を変数とおくことによって，(4) は線形連立方程式と見なすことができる．この連立方程式が実行可能解を持たないとき，有向マトロイドは実現不可能と判定できる．また，(4) が解を持つかどうかの判定は LP ソルバーを用いることで容易に行える．

3 計算機による実験結果

有向マトロイドの実現不可能性判定における双二次最終多項式の有効性を検証するために，$r=4$, $n=8$ であるすべての有向マトロイドについて，2 章で述べたアルゴリズムを適用し，実現不可能な有向マトロイドの列挙を行った[3]．その結果が下の図 2 である．

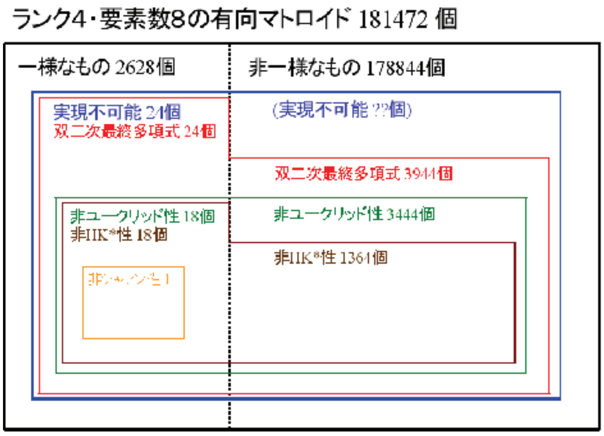

図 2 各性質により実現不可能と判定された有向マトロイドの個数

[1]により非ユークリッド性，非 HK* 性を用いて列挙された実現不可能な有向マトロイドのすべてを，双二次最終多項式によっても実現不可能と判定することができ，さらに今までは実現不可能性の判定に失敗していたいくつかの例についても，判定を正しく行うことができた．

さらにこの結果を受けて，任意の r, n について，双二次最終多項式を用いた手法は非ユークリッドを用いた手法よりも真に強力であることの理論的証明を行った[2]．

4 まとめと今後の課題

我々は双二次最終多項式を用いた手法を実装し実験を行い，この手法が $r=4$, $n=8$ の場合においては他の手法より強力であること，また一般の場合においても双二次最終多項式は非ユークリッド性より強力であることを理論的に示した．このことは，有向マトロイドの実現不可能性判定において，幾何的性質よりも代数的性質の方が良い性質であるとの示唆を与えるものである．

その一方で，双二次最終多項式と非 HK* 性の間の関係は良く知られておらず，r が高次元の場合には反例が存在する可能性もある．

今後の課題としては，実現「可能」性の十分条件である Solvability sequence を用いた手法の計算機実験を行うことが考えられる．この手法は射影を繰り返すことで各ベクトルの座標を定めるもので，他の手法と同様，誤差を含まないロバストな計算で求めることができる．

参考文献

[1] K. Fukuda, S. Moriyama and Y. Okamoto: *Non-LP orientations, nonlinear shellings and non-representable oriented matroids*, Technical Group of Computation, 2004

[2] K. Fukuda, H. Nakayama and S. Moriyama: *Every non-Euclidean oriented matroid admits a biquadratic final polynomial*, in preparation

[3] H. Nakayama, S. Moriyama, K. Fukuda and Y. Okamoto: *Comparing the strength of the non-realizability certificates for oriented matroids*, in proceedings of 4th Japanese-Hungarian Symposium, 2005