

KM₂O-ランジュヴァン方程式論に基づく 非線形リスク解析

RA 鈴木健二郎

情報理工学系研究科数理情報学専攻

1 本研究の目的

本研究の目的は、さまざまな時系列に潜む異常の前兆を定量的に検出するための非線形リスク解析を展開し、[2]で提案された異常性のテスト—Test(ABN)を補強することにある。そこで、時系列の異常性を測る手法として、KM₂O-ランジュヴァン方程式論に基づく非線形予測誤差を利用したリスク関数を導入する。

[2]では、異常性は「時系列の背後にある確率過程における定常性の破れの度合い」と定義され、その前兆を検出するテスト Test(ABN)が提案されている。Test(ABN)の結果は異常グラフと定常グラフという2つのグラフを通じて解析される。その実証結果では、複数の株価指標から市場崩壊の前兆を探るという点で前向きな成果が得られたが、これらのグラフには問題点も残されていた。その一つは、実際の異常の前兆として検出される箇所のほかにも、定常性が急低下する箇所が現れ、それらの見分けがつかないということである。これは、定常性の破れという観点とは別の尺度により、定量的に異常の前兆を調べる必要性があることを示唆している。

本研究では、まさにこの問題を解決するために、異常性の前兆を検出するもうひとつの方法を導入する。理論的背景となるのは、KM₂O-ランジュヴァン方程式論に基づく確率過程に対する非線形予測誤差の算出理論である。非線形予測誤差によって定義される「リスク」の概念を導入し、過去の情報を用いた予測の精度の低下をもって、リスクの増大と解釈するところにその礎がある。

2 非線形予測誤差

$\mathbf{X} = (X(n); 0 \leq n \leq N)$ を確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義された1次元確率過程とする。[1]では、 \mathbf{X} の非線形情報空間 $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{X})$ の生成系の概念が導入され、階数有限の非線形変換された多次元確率過程 $\mathbf{X}^{(q)}$ の構成と、これを用いた有限次元の非線形予測子 $P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X}^{(q)})} X(n)$ の計算アルゴリズムが提案されている。非線形予測子の精度を測る際、階数有限の非線形予測子から階数有限の非線形予測誤差

$$e_q(\mathbf{X})(n) \equiv E \left(X(n) - E(X(n)) - P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X}^{(q)})} X(n) \right)^2 \quad (1)$$

を計算することができる。

3 非線形リスク解析

自然数 L ($1 \leq L \leq N$) と各 t ($L \leq t \leq N$) に対し、時系列 $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}(n); 0 \leq n \leq N)$ から時系列 $\mathcal{Z}^{(t)} = (\mathcal{Z}^{(t)}(n+t-L); 0 \leq n \leq L)$ を抜き出す。さらにその時系列から見本共分散行列関数 $R^{\mathcal{Z}^{(t)}} \tilde{\chi}_{0_j}^{(t)}$ を計算し、これに基づいてその時間域の階数有限の非線形予測誤差

$$PE_j(\mathcal{Z}; L)(t) \equiv \text{the first component of } v^t(\mathcal{Z}^{(t)}, {}^t \tilde{\chi}_{0_j}^{(t)}) - C_{N_{0_j}}(\mathcal{Z}^{(t)} | \tilde{\chi}_{0_j}^{(t)})^2 \quad (2)$$

を計算する。ここで、 $v^t(\mathcal{Z}^{(t)}, {}^t \tilde{\chi}_{0_j}^{(t)})$ は、3次元時系列 ${}^t(\mathcal{Z}^{(t)}, {}^t \tilde{\chi}_{0_j}^{(t)})$ の見本分散ベクトル、

$C_{N_{0j}}(\mathcal{Z}^{(t)}|\tilde{\mathcal{X}}_{0j}^{(t)})$ は階数有限の非線形予測子の自乗平均を表す. さらに, 時間域をシフトしながらこの j に関する最小値をプロットすることで, その推移を一つのグラフに描くことができる. これをリスク関数といい, そのグラフをリスクグラフと呼ぶ:

$$RF(\mathcal{Z}; L)(t) \equiv \min_j \left\{ PE_j(\mathcal{Z}; L)(t); 1 \leq j \leq 18, \right. \\ \left. \text{the time series } \tilde{\mathcal{X}}_{0j}^{(t)} \text{ satisfy Test(S)} \right\}. \quad (3)$$

リスク関数の値に増加傾向が現れた場合は, 非線形予測子が十分には将来の挙動を説明できなくなっていることを示唆しており, リスクが増大していることを表す.

4 実証解析

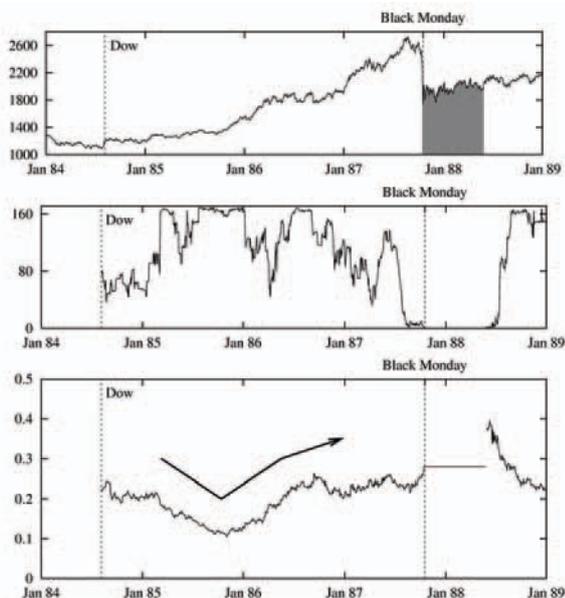


図 1: Results for Dow

図 1 は, ダウ工業平均の 1984 年~1988 年の日次データを用いた結果である. この時期には, 1985 年 9 月 22 日のプラザ合意と 1987 年 10 月 19 日のブラックマンデーが含まれている. 異常グラフ (上図) では, ブラックマンデーの直前に異常時点が見られる様子が読み取れるが, 定常グラフ

(中図) からは, それが数ヶ月前から定常性が徐々に破れていった結果であることが分かる. ただし, 定常性の低下はその前にも現れており, それらを区別するのは難しい. 一方リスクグラフ (下図) では, プラザ合意までは減少傾向にあったものの, その直後から V 字形に変化し, 一貫して増加している現象が観察される. これは, Test(ABN) では区別できなかった異常性の前兆を捉えていると考えることができる.

5 まとめと今後の課題

時系列の予測誤差から定義されたリスク関数を用いることにより, Test(ABN) では判断しにくい異常性の前兆を検出できることが示された. この結果を受け, 今後の非線形リスク解析では, 異常グラフ・定常グラフに加えて, リスクグラフを吟味することで, 異常性の前兆の出現を総合的に判断することを提案する. この手法は, 地震学や医学などの分野での解析にも応用できる可能性があり, より汎用性のある工学的手法として確立させることが, 今後の課題となる.

参考文献

- [1] M. Matsuura and Y. Okabe, *On a non-linear prediction problem for one-dimensional stochastic processes*, Japanese J. of Mathematics, 27(2001), 51–112.
- [2] Y. Okabe, M. Matsuura and M. Klimek, *On a method for detecting certain signs of stock market crashes by non-linear stationarity tests*, International J. of Pure and Applied Mathematics, 3(2002), 443–484.
- [3] K. Suzuki, Y. Okabe and T. Fujii, *On a non-linear risk analysis for stock market indexes*, Technical Report METR 2006-12, Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo.