2次元パッキング

PD 今堀慎治
情報理工学系研究科数理情報学専攻

概要

与えられた図形を，平面上になるべく隙間なく配置する問題（2次元パッキング問題）に対する，実用的な近似解法について考える．

1 はじめに

本研究で取り扱う平面図形のパッキング問題は，様々な形・大きさの図形を2次元平面上に重なりなく配置する問題であり，幾何学や組合せ最適化の分野で古くから研究されてきた．また，VLSI 設計においてモジュールの配置を決定する問題や，鉄鋼・繊維産業において，大きな鉄板や布から注文に応じた大きさの製品を切り分ける問題といった，実際的な問題とも密接な関わりを持ち，近年盛んに研究が行われている．本稿では，2次元パッキング問題の説明を行い，その1種である長方形ストリップパッキング問題に対する，いくつかの近似解法について述べる．

2 2次元パッキング問題

入力として，図形（製品）の集合 $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ と，これを配置する母材が与えられる．ただし，母材の大きさは可変であり，全ての製品を母材上に配置することが可能であるとする．図形のパッキング問題とは，以下に述べる2つの制約条件を満たす製品配置の中で，母材を最も効率的に利用することができるものを求める問題である．

[条件 1] 各製品は母材上に配置される．

[条件 2] 各製品は互いに重なりあわない．

なお，図形の回転の有無や配置における特殊な制約条件の考慮など，多くのバリエーションがあることにも注意が必要である．

本稿では，2次元パッキング問題の中から，図形の形状を長方形に限定し，固定された幅をもつ母材にすべての長方形を配置するときの，母材の高さ最小化を目的とする，長方形ストリップパッキング問題を取り上げ，この問題に対する解法を次節で考える．他の問題に対する解法については参考文献を参照のこと．

3 実用的な近似解法

長方形ストリップパッキング問題はNP困難であり，厳密な最適解を効率的に求めることは難しい．本節では2つのタイプの近似解法を説明する．

3.1 一つずつ詰込む手法

代表的な近似解法として，長方形を一つずつ順に配置していくという手法がある．このタイプの手法では，「どの順番で」「どの場所に」長方形を配置するかを決定する必要があり，この2つを決めるためのさまざまなルールが提案されてきた．先に配置する順番を決定し，その後，各長方形を置く場所を決めるという手法の場合，順番の決め方の主要なものは以下の3つである．

- ランダムな順列を生成する．
- 大きい順（高さ・幅・面積など）に並べる．
- 良い順列を局所探索法により探す．

それぞれに長所・短所があるが，大抵の場合，大きい順に並べるという戦略が成功すること，計算時間を十分にかければ，より良い順列を局所探索法（やメタ解法）によって発見できること，が知られている．

次に，各長方形を置く場所を決定するルールについて述べる．これまでの研究の中で多くの配置場所決定のためのルールが提案され，それらの理論的・実験的な比較から，配置場所決定ルールが解の精度に与える影響が多大であることがわかってきた．有力なルールの例として，1次元ビンパッキング問題に対する近似解法（next-fit 法，first-fit 法など）を改良したものや，できる限り下・左に配置するもの（bottom-left 法）を挙げることができる．前者は配置に要する計算時間の面

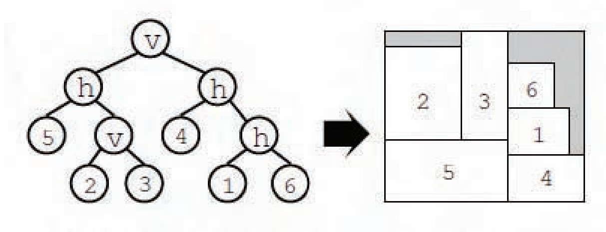
で有利な近似解法であり，後者は実用的な面（多くの問題例に対する計算実験結果に基づく考察）で有効な手法と言える．

次に，逆の順序，すなわち，まず長方形を置く場所を決定し，その後，どの長方形を配置するかを決定する手法について述べる．このタイプの手法は近年注目され始めたものであり，先に述べた方法と比べると研究の歴史は浅い．代表的な手法は，もっとも低いところにある隙間に対して，なるべく隙間を作らないような長方形を選択・配置する欲張り法であり，大規模な例題に対しても実用的な時間でアルゴリズムを実行することができる．理論的な（最悪のケースに対する）解精度の保証は容易ではないが，数値実験に基づく性能評価では，多くの例題に対して，非常に良質な近似解を発見できることが示されている．このタイプの手法に関して，計算時間の算定・理論的な解精度の見積もり・実用上での解精度の向上は非常に重要な課題と言える．

3.2 相対位置決定に基づく手法

次に，長方形間の相対位置を決定するタイプの手法について述べる．前節で述べたとおり，パッキング問題には 2 つの制約条件があり，後者が問題の難しさの原因となっている．ここで紹介する手法では，各長方形ペアに対して，互いに重ならないための相対位置を決定し，それに基づいて長方形の座標を決定することを試みる．このタイプでもっとも素朴な方法は，長方形ペアごとに独立に相対位置を決定するものであるが，場合の数の多さと，相対位置の組合せによっては配置不可能となることから良い手法とは言えない．（例えば，3 つの長方形 a, b, c に対し，独立に「a は b の左」，「b は c の左」，「c は a の左」という関係が選ばれたとすると，これらの長方形を配置できないことは明らかであろう．）これらの欠点を改善した手法がいくつか提案されているので，ここではそれらの中から 2 つの手法を紹介する．

はじめに述べるのは，2 分木を利用して長方形間の位置関係を決定する手法である．まず，図 1 のような，葉の数が n の 2 分木を準備する．各葉は長方形に対応し，内部節点には位置関係を表すラベルが格納されている．長方形間の位置関係は，その共通の祖先で最も深い内部節点のラベルによって決まる．ここで，h は水平方向のカットで長方形対が切り分けられることを表し，v は垂直方向のカットを表すラベルである．例えば，図 1 の長方形 3 と 5 の場合，h ラベルの節点の左の子



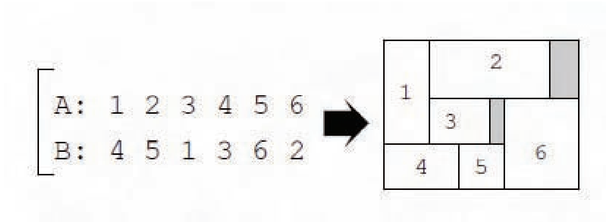


図2: 順列対を用いた相対位置決定.

として 5 が，右の子孫として 3 があり，このとき 5 を 3 の下に配置することにする．この規則によって，一つの 2 分木から全長方形間の相対位置が決定する．この手法の特徴として：(1) 2 分木によって定まる相対位置に従い，互いに重ならないように長方形を配置できる，(2) 配置における特殊な制約の一つである「ギロチンカット制約」を満たす配置が得られる，の 2 つがある．

次に，長方形の順列のペア（順列対）により長方形間の相対位置を決定する手法を紹介する．この手法では，図 2 のように長方形の順列を 2 つ準備し，この順列対における位置関係を利用して長方形の相対位置を定める．例えば，長方形 1 が両方の順列において長方形 2 より前にある場合，長方形 1 を 2 の左に置き，長方形 1 と 4 のように，順列 A で前，B で後ろにある場合は，長方形 1 を 4 の上に置く．この手法の特徴として，矛盾のあるような相対位置は生じさせないことと，任意の配置に対応する相対位置関係を表現できることが挙げられる．

これらの相対位置決定に基づく手法の場合，解の探索には局所探索法やメタ解法が有効である．筆者らは，複数の効率的メタ解法を提案し，数値実験により有効性を確認した．

参考文献

今堀慎治，梅谷俊治： 切出し・詰込み問題とその応用 ―(2)長方形詰込み問題，(3)多角形詰込み問題―，オペレーションズ・リサーチ，50 (2005) 335－340，403－408.