物理・情報デュアル制御

原辰次 * 　津村幸治 * 　大石泰章 †

∗：情報理工学系研究科システム情報学専攻

†：情報理工学系研究科数理情報学専攻

1 有限周波数特性に基づく動的システムの設計

原 辰次（システム情報学専攻）

1.1 概要

KYP (Kalman–Yakubovič–Popov) 補題は，最適制御，ロバスト制御，適応制御などシステム制御理論の展開において非常に大きな役割を果たしてきた．本研究では，これまで KYP 補題を一般化し，線形時不変系に対する有限周波数特性を統一した形式 (線形行列不等式) で特徴付け，それに基づいた新しい動的システムの設計法を提案してきた [1]．また，ロバスト GKYP 補題や時間領域での等価な条件を導出するとともに，設計支援パッケージを MATLAB 上に構築した [2].

本年度は，より実用的な設計への適用を目指して，以下の 2 点を主に行ってきた.

- ロバスト GKYP 補題の改良を行うとともに，ディジタル制御系設計に向けたデルタ領域での線形行列不等式を導出し，それらの有用性を PID 設計への適用によって確認した [3].
- より一般的な制御系設計法への拡張を目指し，動的出力フィードバック設計の条件を導出し，提案設計法の有用性を確認した [4].

なお，本研究はヴァージニア大学の岩崎徹也助教授との共同研究である.

1.2 デルタ領域 GKYP 補題

ディジタル制御系設計に向けて，デルタ領域での GKYP 補題を導出した．ここで，サンプリング周期を T とするとき，周波数変数 δ は $\delta := (e^{j\omega T}-1)/T$ で定義され，$T \to 0$ とすると連続時間周波数変数 ω に 漸近することが知られている．デルタ領域 GKYP 補題は，連続時間あるいは離散時間系の場合と同じように 2 つの 2×2 エルミート行列を T に応じて適切に設定することにより，導出できる.

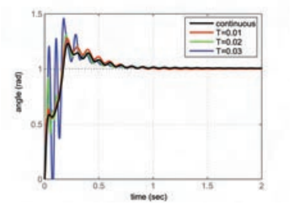

図 1: ステップ応答（連続時間ベース設計）

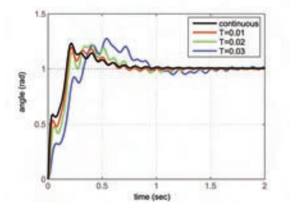

図 2: ステップ応答（デルタ領域設計）

その結果を，ねじり振動系のディジタル PID 制御器 K_d の設計へ適用した例を示す．ここで,

$$K_d(\delta) = k_p + \frac{k_i}{\delta} + \frac{k_d\delta}{(1-e^{-T/T_d})/(T/T_d)+T_d\delta}$$

で，開ループ整形手法に基づいている．連続時間ベース設計ではサンプリング周期を長くしていくと応答が振動的になるが (図 1 参照)，デルタ領域設計ではサンプリング周期に応じた即応性が自動的に選択され，望ましい応答が得られる (図 2 参照).

1.3 ロバスト GKYP 補題

変動 Δ を含む線形時不変系

$$\begin{bmatrix} \lambda x \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \ w = \Delta z$$

を考え，そのような系に対する GKYP 補題を導出した．これは，与えられた周波数特性を満たすための必要十分条件ではなく十分条件を与えているが，以下の PID 設計例に見られるように，ある程度実用的である．

$$P_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+(1+\sigma)s+10)}$$

で与えられる制御対象に対し，変動パラメータが $|\sigma| < 0.3$ の範囲で変動する場合を考え，ロバスト GKYP 補題に基づいて開ループ整形手法で PID 制御器を求めた．その結果のナイキスト軌跡（図 1 参照）から，導出した条件の有用性が確認できる．

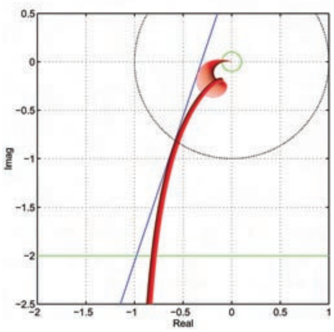

図 1: ナイキスト軌跡

1.4 動的出力フィードバック制御系設計

$$\begin{bmatrix} \lambda x \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

で与えられる制御対象に対し，動的出力フィードバック

$$\begin{bmatrix} \lambda x_c \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y \end{bmatrix}$$

を施した制御系を考える．このとき，閉ループ系の状態空間表現は

$$\left[\begin{array}{cc|c} A+B_2D_cC_2 & B_2C_c & B_1+B_2D_cD_{21} \\ B_cC_2 & A_c & B_cD_{21} \\ \hline C_1+D_{12}D_cC_2 & D_{12}C_c & D_{11}+D_{12}D_cD_{21} \end{array}\right]$$

と表すことができる．この表現に対し，GKYP 補題を適用し，適切なマルチプライアを導入することにより，設計用の行列不等式が得られる． これに基づいた動的出力フィードバック制御系の設計法を提案し，数値例題によりその有効性を確認した．

2 量子ダイナミクスの制御

佐々木 智丈，津村 幸治，原 辰次（システム情報学専攻）

2.1 背景と目的

本研究では量子情報機器実現の基礎とすべく，連続測定が可能な量子力学系を念頭に，量子ダイナミクスのための制御理論の構築とその実用を目指す．なお本研究は，カリフォルニア工科大学の山本直樹との共同研究である．

2.2 量子ダイナミクス

連続測定下における量子ダイナミクスとして次のマスター方程式 (SME) を扱う;

$$\begin{aligned} dP &= -\mathrm{i}[u(t)H_{\mathrm{fb}}, P]dt - \mathrm{i}[H,P]dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M} \mathcal{D}[B_k]Pdt + \mathcal{D}[C]Pdt + \mathcal{H}[C]Pdw \\ dy &= \mathrm{Tr}(CP)dt + dw \end{aligned}$$

ここに y: 出力，u: 制御入力，P: 量子状態，C: オブザーバブル，H_{fb}: 制御ハミルトニアンである．

2.3 SME 解析のための行列表現に基づく演算子の導出

本研究テーマではこれまで，SME をベクトル表現に変換し，制御論的な解析を行ってきた．この手法は，変換後，各種の条件導出までの計算が機械的に実行できるという利点を持つが，反面，SME が本来有するダイナミクスの構造を複雑にし，見通しを悪くするという欠点をも有している．これに対しここでは，SME の構造を保ったまま，可到達性や可観測性の解析を容易とする行列変数の演算子を導入した [5]．またこの行列形式に対する演算子を用いて，SME の可到達性/可観測性に関する幾つかの条件を得た [5].

2.4 低次元量子スピン系の解析

応用上重要となる低次元量子スピン系に関して，可到達性/可観測性に関する諸結果を得た [7]．また 2 スピン系についての安定化コントローラを見い出した [6].

3 量子化データを用いたシステム同定

津村 幸治（システム情報学専攻）

3.1 背景と目的

本研究ではこれまで，量子化された入出力データを用いたシステム同定問題に取り組んできた．ここでは前年に続いて量子化データを用いたシステム同定において合理的な誤差規範，もしくはパラメタ推定器について再考し，その妥当性について議論した [8]．以上では誤差評価等全て確率的アプローチに基づくものであったが，本年度はさらに確定的評価を混在させた問題を考察し，最適な量子化器についての結果を得た [9]．以下後者について説明する．

3.2 最適量子化器

次に示す SISO FIR モデルを対象とする．

$$
\begin{aligned}
&y_o(k) = q(y(k)),\ y(k) = \phi(k)\theta,\\
&\phi(k) := \begin{bmatrix} u(k) & \cdots & u(k-n+1) \end{bmatrix},\\
&\theta := \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

q はメモリレスの量子化器，$u(k)$ は一様分布に従う．入力 $u(k)$ と出力 $y_o(k)$ のデータ列から，システムパラメタ θ の推定誤差についての hard bound が求められ，それが与えられた閾値を満足したとき，そのデータ列は acceptable とする．ここで acceptable なデータ列の生成確率は，量子化器 q に依存して決まる．そこで与えられた複雑度の制約 (量子化区間数 M) のもと，最適な量子化器を見つける問題を考える．

推定誤差の hard bound の大きさを表す指数を ϵ とするとき，最適な量子化器は，i 番目の量子化区間の境界を d_i とすると，

$$
\begin{aligned}
&d_{M-j} = d^*_{M-j}(d_{M-j+1}),\ j = 1, 2, \ldots, M-1,\\
&\qquad\qquad d_{-(M-j)} = -d^*_{M-j}(d_{M-j+1}),
\end{aligned}
$$

と求まる．ただし $d^*_j(d_{j+1}) := (1-\epsilon)d_{j+1}$.

この最適量子化器は基本的に logarithmic であるが，原点近傍が don’t care の領域となる．つまり制御のための最適量子化器と，これまで確率的アプローチに従って導出した最適量子化器との，両方の性質を合わせもったものとなる．

4 ロバスト半正定値計画問題の領域分割型解法

大石 泰章（数理情報学専攻）

4.1 概要

ロバスト半正定値計画問題は，ロバスト制御やゲインスケジュールド制御の多くの問題がそれに帰着されるという制御において重要な問題であり，多項式最適化を特殊な場合として含むため最適化においても重要である．本研究では，ロバスト半正定値計画問題を解く領域分割型の解法を提案し [10]，それが既存の解法にはない良い性質を持つことを示した [11].

4.2 領域分割型解法

ロバスト半正定値計画問題は次のように記述される：

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \text{minimize} \quad && c^{\mathrm{T}}x\\
& \text{subject to} \quad && F(x,\theta) \succeq O \quad (\forall\theta \in \Theta).
\end{aligned}
$$

ただし，c は与えられた非零の実ベクトルであり，実ベクトル x は設計変数，θ は不確かなパラメータで，その定義域である Θ は p 次元の（凸とは限らない）有界多面体であるとする．また $F(x,\theta)$ は対称行列値の関数で，x についてアフィン，θ について多項式であるものとし，$F(x,\theta) \succeq O$ は左辺の行列が半正定値であることを表すものとする．

この問題は重要ではあるが，効率的に解くのが困難であり，実際，NP 困難であることが証明されている．そのためこの問題を直接解くのではなく，問題の制約をより強くてより扱いやすい制約で置き換えた近似問題を構成して解く方法が開発されてきた．特に最近提案された KYP 補題に基づく方法や，二乗和多項式に基づく方法は，近似精度をいくらでも高くできるという漸近的厳密性を持つために注目されている．

本研究では，新しい漸近的に厳密な解法として，以下のような領域分割型の解法を提案した

[10]．まず，適当な行列 $G(x)$ と $M(\theta)$ を使って $F(x,\theta) = (1/2)M(\theta)^{\mathrm{T}}G(x)M(\theta)$ と表し，さらに $[M(\theta)\ H(\theta)]$ が正則行列となり，$M(\theta)^{\mathrm{T}}H(\theta)$ が恒等的に零となり，かつ θ についてアフィンであるような行列 $H(\theta)$ を構成できることに注目する．このとき，多面体 Θ を凸多面体の集合 $\{\Theta^{[j]}\}_{j=1}^{J}$ に分割し，個々の凸多面体の頂点の集合を $\mathrm{ver}\,\Theta^{[j]}$ で表すことにすると，問題

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{P(\{\Theta^{[j]}\}):} \\
\text{minimize} & c^{\mathrm{T}}x \\
\text{subject to} & G(x) + H(\theta)W^{\mathrm{T}} + WH(\theta)^{\mathrm{T}} \succeq O \\
& (\forall\theta \in \mathrm{ver}\,\Theta^{[j]},\ \ \forall j = 1, 2, \ldots, J)
\end{array}
$$

はもとの問題 P の近似問題であり，しかも分割 $\{\Theta^{[j]}\}$ を細かくすることで，いくらでも近似精度を上げることができる．

4.3 性質

領域分割型解法の近似誤差は，もとの問題と近似問題の最小値の差である $|\min P(\{\Theta^{[j]}\}) - \min P|$ で表される．また，部分領域 $\Theta^{[j]}$ の半径を $\mathrm{rad}\,\Theta^{[j]}$ で表すとき，分割 $\{\Theta^{[j]}\}$ の細かさは最大半径 $\overline{\mathrm{rad}}\,\{\Theta^{[j]}\} := \max_j \mathrm{rad}\,\Theta^{[j]}$ で表される．近似誤差は，最大半径を小さくすると零に収束することが定性的にわかっていたが，さらに定量的に次の性質を持つことを示せた [11]．

定理．正数 C_1, C_2 が存在して，$\overline{\mathrm{rad}}\,\{\Theta^{[j]}\} \le C_1$ ならば

$$|\min P(\{\Theta^{[j]}\}) - \min P| \le C_2\ \overline{\mathrm{rad}}\,\{\Theta^{[j]}\}. \quad \Box$$

既存の KYP 補題や二乗和多項式に基づく解法では，このような定量的結果は得られていない．

この結果により，最大半径を小さくするとき，近似誤差は最大半径の高々1次のオーダーで零に収束することがわかる．また，係数 C_1, C_2 を計算することも可能である．さらに上の結果を改良することで，少ない計算量で近似誤差を小さくするような効率的な分割を得ることも可能である．

参考文献

[1] T. Iwasaki and S. Hara: Generalized KYP Lemma: Unified Frequency Domain Inequalities with Design Applications, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 50, No. 1, pp. 41–59 (2005).

[2] 塩形，原: 一般化 KYP 補題に基づく制御系設計ツール，シミュレーション, Vol. 25, No. 1, (2006).

[3] S. Hara, T. Iwasaki and D. Shiokata: Robust PID Control Using Generalized KYP Synthesis, *Control System Magazine*, Vol. 26, No. 1, pp. 80–91 (2006).

[4] T. Iwasaki and S. Hara: Dynamic Output Feedback Synthesis with General Frequency Domain Specifications, *Proc. IFAC 2005 16th World Congress* (2005).

[5] 佐々木智丈，原辰次，津村幸治: 量子制御ダイナミクスの複素行列表現による解析, 第 34 回 制御理論シンポジウム (2005).

[6] N. Yamamoto, K. Tsumura and S. Hara: Feedback Control of Quantum Entanglement in a Two-spin System, *The 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 3182–3187 (2005).

[7] N. Yamamoto, H. Machida, K. Tsumura and S. Hara: Local Reachability of Stochastic Quantum Dynamics with Application to Feedback Control of Single-spin Systems, *The 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 8209–8214 (2005).

[8] K. Tsumura: Criteria for System Identification with Quantized Data and the Optimal Quantization Schemes, *Proc. IFAC 2005 16th World Congress* (2005).

[9] K. Tsumura: Optimal Quantizer for Mixed Probabilistic/Deterministic Parameter Estimation, *Technical Report of The Univ. Tokyo*, METR 2006-07 (2006).

[10] 江本，大石: 有理式で表される不確かさを持つ制御系の解析・設計法，計測自動制御学会論文集, vol. 41, no. 4, pp. 314–321, 2005.

[11] Y. Oishi: “A region-dividing approach to robust semidefinite programming and its error bound,” *Technical Report of The Univ. Tokyo*, METR 2006-10 (2006).