

不確実性のモデル化活動グループ

竹村彰通

情報理工学系研究科数理情報学専攻

概要

不確実性のモデル化活動グループでは、確率論、統計学、カオス理論等の手法を用いて、複雑な現実の現象に含まれる不確実性を処理し、ロバストなモデル化の方法論を研究している。現実の複雑な現象は、確定的な理論モデルのみでその挙動を正確に記述・予測することは難しく、何らかの形の不確実性のモデル化が必要である。本グループは不確実性のモデル化の総合的な方法論を確立することを目指して、研究成果を蓄積しつつある。

1 研究の目的

現実の様々な現象をモデル化する際に、モデルにおける確定的な部分と非確定的な部分の切り分け、さらに非確定的な部分の扱い、等のバリエーションを考慮すれば、現象のモデル化において様々なアプローチが可能であり、ロバスト性の観点から、多くの方法論を統一的に比較しすぐれたモデルを選びだす指針を与えることが重要である。以下では、このような目標を念頭におきながら、本年度の研究成果の概要と今後の研究の展望について述べる。

2 研究の内容

本グループは「不確実性のモデル化と予測」および「ロバスト時系列計算」の二つのサブグループに分かれており、前者では統計的モデリング及びカオス理論に基づくモデリングを研究している。後者では、揺動散逸原理に基づく時系列解析を研

究している。ここでは現在研究が進行中のいくつかの研究テーマについて概要を紹介する。

1. 確率場の理論と応用

近年になって、空間的な広がりを持ったデータ解析が重要となって来ている。空間データ解析の基礎理論となるのは、時系列解析の添字を多次元に拡張した確率場の理論である。確率場の理論は、確率論と幾何学の境界領域にあり、双方の道具を駆使して新たな展開が得られている。

ガウス確率場の理論においては、最近になって「オイラー標数法」や「チューブ法」の方法が急速に発展しており、竹村およびその共同研究者によって多くの成果が得られている。特に2003年秋には Taylor, Takemura, Adler によって完全に一般的な設定のもとでオイラー標数法の近似の精度を保証する結果が得られ、永年の懸案であったオイラー標数法の正当化が与えられた。この結果は次の形で掲載された: Taylor, J. Takemura, A. and Adler, J. A. (2005). Validity of the expected Euler characteristic heuristic. *Annals of Probability*, **33**, 1362-1396. また非ガウス確率場へのオイラー標数法の応用は、栗木・竹村の METR 05-10 のレポートで考察されている。

2. ゲーム論的確率論に基づく予測理論

本年度はゲーム論的確率論に基づく予測理論の研究において大幅な進展があった。ゲーム論的確率論は2001年に Glenn Shafer and Vladimir Vovk, “Probability and Finance,

It's Only a Game!", Wiley, が出版されて以来注目されている。ゲーム論的確率論について竹村は Shafer 氏および Vovk 氏との研究交流を続けているが、本年度には公文雅之氏、竹内啓氏、鈴木大慈氏との共同研究が本格化した。この共同研究からすでに3本のテクニカルレポートが発表されている。

ここではゲーム論的確率論について簡単に説明しておく。確率とは何かということに関しては、歴史的に多くの哲学的な議論がなされて来たが、1933年にコルモゴロフによって測度論的確率論の公理的扱いが出版されるとともに、確率は「点」や「線」と同様に、公理的に定義されその意味を考える必要はないものと理解されるようになった。コルモゴロフの測度論的確率論によって確率論の数学的基礎が固められ、数学の一分野としての確率論はその後大きな発展をとげることとなった。

その後も、ベイズ流の主観確率をめぐる議論などで、確率の解釈に関する議論は続いて来たが、コルモゴロフの測度論的確率論によってかわるような確率論の体系は生まれてこなかった。しかしながら、Shafer and Vovk によるゲーム論的確率論は、賭けとゲームの文脈の中で、事象の確率を内在的かつ整合的に定義できることを示した。さらにこの文脈において、大数法則、中心極限定理、重複対数法則などの確率論の基本的な法則を、測度論を前提とすることなく導出することに成功している。また数理ファイナンスにおける基本公式であるブラック・ショールズ公式の導出にも成功している。このようにゲーム論的確率論はコルモゴロフの測度論的確率論とは全く別に、不確実性を扱うための一つの基本的枠組として非常に期待できる新しい理論体系である。

3. 統計的推測・予測の情報幾何

性能の良い予測法・推測法を、情報幾何のアプローチを用いて統計モデルとベイズ法に基づいて系統的に構成する手法の研究を行った。

パラメトリックな統計モデルは情報幾何の立場からは双対接続をもつリーマン多様体と見なせる。これをモデル多様体と呼ぶことにする。モデル多様体の微分幾何学的な性質を調べることにより、適切な事前分布が構成でき、良い予測・推測が可能になることを示した。応用上重要な具体的なモデルは、それぞれ必然性をともなった美しい幾何学的な構造を持つことが多い。本研究では、応用上重要な具体的なモデルの幾何学的な構造を調べるとともに、性能のよいベイズ予測をあたえる事前分布を具体的に構成した。

本研究に関連して、2005年12月12日から16日まで、東京大学本郷キャンパス山上会館において、第2回「情報幾何とその応用」国際会議を開催した。国内から多くの研究者が参加するとともに、海外から、Dawid, Petz, Pistone など情報幾何関係の著名な研究者や若手研究者が多数参加した。統計的推測理論、ベイズ統計、代数統計学、量子統計モデル、決定理論の幾何学、ブースティング、脳、ニューラルネットワーク、チューブ法、ゲーム論的確率論など、統計学、量子情報、学習理論等の幅広い分野における情報幾何を切り口とした研究に関する発表がなされた。この国際会議は、48編の論文からなるプロシーディングス “Proceedings of the second international symposium on information geometry and its applications” にまとめられている。

4. MCMC 法による離散データ解析

離散データ解析においてマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) によって正確な推論をおこなう方法が注目されている。理論的にはグレブナ基底を用いた代数アルゴリズムが利用できるが、問題のサイズが大きくなるとグレブナ基底を求めるのは容易ではなく、基底の理論的な考察が重要である。これまで、青木・竹村によりマルコフ基底が極小であるための必要十分条件などが得られ、さらに不変マルコフ基底なども解明された。本年度は、マル

コフ基底の不変性に関する基礎理論, すべてのマルコフ基底に含まれる単項式の性質, などに関する研究成果が得られた.

5. 空間統計学におけるモデリングと漸近理論

地球環境データなどの統計的解析は, 観測領域が有界で標本の観測地点が密になっていくという設定が意味を持つ. このような稠密型漸近理論の設定は現実的である反面, 従来の漸近理論とは扱い方が異なるため, 十分に解明されていない. 空間データの従う確率分布としてガウス分布を仮定した場合, 空間的依存関係は相関関数で記述される. 相関関数に強い影響を与えるパラメータとしてフラクタル指数があり, フラクタル指数を精度よく推定することは予測(補間)性能の向上につながる. 本研究では擬似最尤法に基づくフラクタル指数の推定量に対し, その分散を稠密型漸近理論の枠組みで決定した. さらに, 漸近バイアスの式が, 情報幾何学の立場から自然に導かれることを示した.

一方で, ガウス性の仮定はしばしば現実のデータに適応しないことがある. そのための対処としてガウス分布を変換したモデルが提案されている. 従来の変換モデルでは変換のクラスが限定されていた. 本研究では, より一般的かつ扱いやすい変換モデルのクラスを構成し, 応用・理論の両観点から検討した.

6. 複雑システムモデリング

カオス理論や力学系理論に基づく解析法は, 伝統的な時系列解析とは異なる新たな視点と方法を提供するものであり, 生体や経済現象など複雑な現象に対して有効であることが期待される. 合原らは今年度, 複雑システムモデリングの理論と応用に関して, カオス写像の結合系や多状態連想記憶モデルの非線形ダイナミクス, 二重回転写像のカントール関数的応答特性, クラス I*ニューロンの電子回路実装などの研究を行なった. また, 東京大学駒場リサーチキャンパスコンベンションホールにおいて, International Symposium

on Complexity Modelling and its Applications 2005 (2005年11月21日~23日), 感染症理論疫学研究大会 2006 (2006年1月28日), マルチニューロン研究会 2006 (2006年2月20日~21日) の3つの会議を科学技術振興機構 ERATO 合原複雑数理モデルプロジェクトと共催で開催した.

7. 揺動散逸原理に基づく時系列データの非線形構造の解析

揺動散逸原理に基づく時系列解析の分野で, 岡部らは揺動散逸定理の連続時間への拡張などの理論的成果とともに, 実際の時系列データの定常性・異常性・因果性・決定性を検証する手法を開発している. そしてこれらの手法を地球科学・治水工学・医学・金融工学等への広い応用分野への応用を進めている.

今年度は, KM_2O -ランジュヴェアン方程式論における非線形情報解析と因果解析を進展させ, 離散時間の確率過程に対する非線形フィルタリング問題における非線形フィルターを計算するアルゴリズムを求めた. また時系列データの異常性を非線形予測誤差の挙動の崩れと考え, 時系列データの異常性の兆候を検出する異常性のテスト Test(RSK) を提唱し, その有用性を実証した. 定常解析と決定解析を通常地震波の時系列データと深部低周波地震波の時系列データに適用し, 「低周波」の特徴の一端を捉えることに成功した.

3 テクニカルレポート

本グループでは, テクニカルレポートの形で研究成果の早期の発信をはかっている. ここでは本グループのメンバーによる本年度のテクニカルレポートの内容を抜粋して紹介することにより, 最新の研究成果を概観する.

METR 05-08

Hisayuki HARA and Akimichi TAKEMURA, Improving on the Maximum Likelihood Estimators of the means in Poisson Decomposable

Graphical Models, 26pp., April 2005. ポアソン分布の平均ベクトルに分解可能モデルを仮定した時の同時推定の問題において, 最尤推定量を優越する推定量のクラスを提案している. その際弦グラフに関するいくつかの基本的な性質も導いている.

METR 05-10

Satoshi KURIKI and Akimichi TAKEMURA, Euler characteristic heuristic for approximating the distribution of the largest eigenvalue of an orthogonally invariant random matrix, 35pp., May 2005. 直交不変な確率行列の最大根の標本分布の近似として, オイラー標数法を用いた場合の近似公式と近似の精度に関する結果を導出している.

METR 05-13

Yuzo MARUYAMA and Akimichi TAKEMURA, Admissibility and minimaxity of generalized Bayes estimators for spherically symmetric family, 21pp., June 2005. 密度関数の等高線が同心円となるような分布族の位置ベクトルの推定問題において, 一般化ベイズ推定量が許容的かつミニマクスとなるための十分条件を与えている.

METR 05-14

Satoshi AOKI and Akimichi TAKEMURA, The largest group of invariance for Markov bases and toric ideals, 30pp., June 2005. マルコフ基底あるいはトーリックイデアルの生成系について, イデアルを定義する行列の対称性を表す対称群の最大の部分群を定義し, いくつかの統計学の問題について最大の部分群を確定している.

METR 05-20

Masayuki KUMON and Akimichi TAKEMURA, On a simple strategy weakly forcing the strong law of large numbers in the bounded forecasting game, 15pp., August 2005. ゲーム論的確率論の設定で, Reality の手が有界な場合に, 大数の強法則を強制するための明示的な戦略を与えている.

またその戦略を用いた場合の大数強法則の収束のオーダーを評価している.

METR 05-22

Hisayuki HARA and Akimichi TAKEMURA, Bayes Admissible Estimation of the Means in Poisson Decomposable Graphical Models, 29pp., August 2005. ポアソン分布の平均ベクトルに分解可能モデルを仮定した時の同時推定の問題において, 許容的なベイズ推定量のクラスでかつ最尤推定量を優越する条件を与えている.

METR 05-25

Akimichi TAKEMURA and Taiji SUZUKI, Game theoretic derivation of discrete distributions and discrete pricing formulas, 16pp., September 2005. ゲーム論的確率論の設定において, さまざまな離散分布や, 2項モデルのユーロピアンオプションの価格公式などが自然な形で導出されることを, 初等的な方法で示している.

METR 05-32

Masayuki KUMON, Akimichi TAKEMURA and Kei TAKEUCHI, Capital process and optimality properties of Bayesian Skeptic in the fair and biased coin games, 18pp., October 2005. ゲーム論的確率論のコイン投げゲームにおいて, Skeptic がベイズ戦略を用いた場合の資金過程の明示的な表現を求め, さまざまな意味でベイズ戦略が最適であることを示している.

METR 05-34

Satoshi AOKI, Akimichi TAKEMURA and Ruriko YOSHIDA, Indispensable monomials of toric ideals and Markov bases, 17pp., November 2005. マルコフ基底あるいはトーリックイデアルの生成系において, どの生成系にも必ず含まれなければならない単項式を “indispensable monomials” として定義し, indispensable monomial のいくつかの必要十分条件や indispensable monomial の探索法について結果を導出している.