面の細分割の任意位相への拡張

RA 川原田寛

情報理工学系研究科数理情報学専攻

概 要

工業製品をつくるための CAD や CAM，コンピュータグラフィクス（CG）でのモデルデータの設計など，形状に関する分野は幅広い．よって形状を扱う手法を整えることは大切な問題であり，特に形状を表現する手法の構築はその最も基礎となる部分である．本研究は，形状表現のうち物体の表面である曲面を生成する手法を開発することを目的とする．

1　はじめに

形状表現の手法として有名なものは，パラメトリック曲面とポリゴンメッシュである．パラメトリック曲面とは 2 パラメータの関数でもって曲面を表現する手法で，滑らかな曲面を扱いやすいが任意位相の曲面を関数で表現することは容易ではなかった．逆にポリゴンメッシュとは多角形を張り合わせた区分線形曲面のことで，滑らかではないが任意の形状を容易に近似できるという特性を持っている．これらの手法の問題点を解決した手法が細分割（subdivision）[1] と呼ばれるものである．細分割とは任意の二多様体であるメッシュに対して施す繰り返し的な操作で，無限回施すと滑らかな曲面を生成する手法である．図 1 を見てもらいたい．このように曲面が生成されていく際に位相は変更されない，つまり初期のメッシュを任意の形状に合わせて作っておけば，任意位相の滑らかな曲面を細分割は生成することができるのである．

細分割は優れた手法である．しかし，細分割で生成されるメッシュの面が平らになっていないという問題も存在した．我々はこの問題を，細分割の双対構造を構成すること（これを dual subdivision，もしくは面の細分割と呼ぶ）[3] で解決した．また，双対構造についての理論的解析を行った．さらに細分割とその双対とを含むような細分割の拡張を行うことにも成功した．

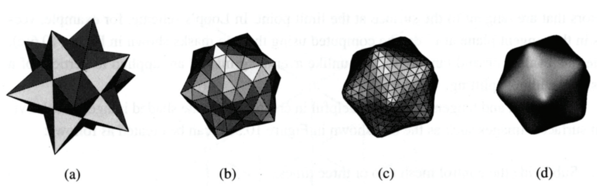

図 1: Loop subdivision [2].

2　細分割の双対構造の構成

3 次元実射影空間 P^3 における双対変換 $(p_0, p_1, p_2, p_3) \leftrightarrow p_0w + p_1x + p_2y + p_3z = 0$ を考える（この変換の下での幾何学的性質の保存を射影幾何学の双対原理と呼ぶ）．細分割のそれぞれの段階においてこの双対変換を施したとき，得られるメッシュの列を細分割の双対構造によって得られたメッシュの列と見なす．細分割の双対構造は通常の細分割と同じく極限で滑らかな曲面を生成する．また，メッシュを双対変換して得られる双対メッシュにおいては，元のメッシュの価数 k の頂点に対して k 角形の面が現れるので，細分割の双対構造によって得られるメッシュの面は全て平らであることが分かる．要するに細分割の双対構造では，今までできなかった三角形や四角形でない平らな多角形によって形状を表現するこ

とが可能となる．さらに従来の細分割と同様に多重解像度解析が使えるなどの良い性質が見つかった．また，星状形という図形のクラスと図形の有界性に関連があること，およびこの変換において滑らかさ（C^1 級連続）が保たれることなどを示した．しかしこの細分割の双対構造は任意の二多様体を表現できないという問題があった．この問題に対し我々は変曲平面などの新しい概念を導入し，細分割の双対構造が任意の形状を表現できるように拡張した．図 2 は細分割の双対構造によって幾何学上長年問題とされていた平らな多角形で非凸な物体を近似した例である．

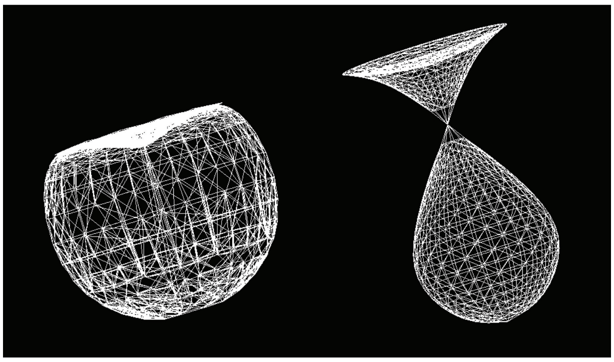

図 2: 左は細分割の双対構造によって作られたメッシュで非凸で変曲点を有している．右は通常の細分割で作られた対応するメッシュで変曲点の双対として嘴点を持っている．

さらに細分割によって作られる曲面が C^k 級連続であることを $C^k_{\mathbf{primal}}$ で表し，双対構造によって作られる曲面が C^k 級連続であることを $C^k_{\mathbf{dual}}$ で表すとする．このときいくつかの条件の下で次の定理を得た．

Theorem 1 (滑らかさの条件)

$$C^1_{\mathbf{primal}} \Leftrightarrow C^1_{\mathbf{dual}}$$

$$C^{k+1}_{\mathbf{primal}} \Rightarrow C^k_{\mathbf{dual}} \Rightarrow C^k_{\mathbf{primal}}$$

これにより細分割の双対構造が高い精度の滑らかさを持つことを保証することができた．

3　直線の細分割

細分割の双対構造は双対変換 $(p_0, p_1, p_2, p_3) \leftrightarrow p_0w + p_1x + p_2y + p_3z = 0$ によって従来頂点であったものを平面にすることによって生まれた細分割法であった．ここでメッシュの頂点，面について細分割を構成することができたのであるならば，メッシュの残りの要素つまり辺についても細分割が構成できると考えることは自然であろう．この最後の辺を基にした細分割法を直線の細分割（line subdivision）[4] と名づけた．直線の細分割は，P^3 における直線を P^5 中の Klein quadric と呼ばれる 2 次曲面の点に Klein 写像でもって移すことによってできる Line Geometry [5] という幾何学の体系に基づいて構成される．

ここで従来の細分割とその双対構造は直線の細分割の特殊な状況に対応していることを示した（図 3）．これにより通常の細分割と双対構造とを統一的に扱うことができるようになった．

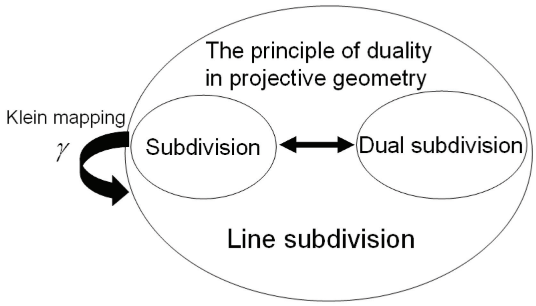

図 3: 細分割の構造.

参考文献

[1] Warren, J., Weimer, H.: Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach. Morgan Kaufmann Publishers (1995)

[2] Stollnitz, E.J., DeRose, T.D., Salesin, D.H.: Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications. Morgan Kaufmann Publishers (1996)

[3] Kawaharada, H., Sugihara, K.: Dual subdivision a new class of subdivision schemes using projective duality. METR 2005-01, The University of Tokyo (2005)

[4] Kawaharada, H., Sugihara, K.: Line subdivision. METR 2005-02, The University of Tokyo (2005)

[5] Pottman, H., Wallner, J.: Computational Line Geometry. Springer (2001)