量子情報理論における計算幾何

PD 大音真由美

情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻

概 要

量子状態によって作られるパラメータ空間は非ユークリッドであるが，その双対座標においては計算幾何のアルゴリズムが適用できる．本文では，この結果を用いて Holevo 容量という量子情報理論における基本的な量が計算されることを示す．

1 はじめに

数理統計学と情報理論における問題に量子力学的な性質を取り入れた量子情報幾何 [1] は，量子ビットが持つ量子状態を点，2 つの量子状態の相対エントロピー（量子相対エントロピー）を距離とそれぞれ定義した幾何学である．量子状態空間における量子状態はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の密度行列 ρ によって記述され，ρ は半正定値のハミルトニアン行列でそのトレースは 1 である ($\rho = \rho^* \geq 0$, Tr $\rho = 1$)．特に，1 量子ビットの量子状態 ρ の取りうる範囲は，3 次元のブロッホ球で表される．量子状態 ρ が持つフォンノイマンエントロピー S は $S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho)$ と定義され，異なる 2 量子状態間 ρ と σ の相違度の尺度となる量子ダイバージェンス D は，非負で単調性を持ち一般に非可換である．ρ が混合状態のとき $D(\rho\|\sigma) = D^*(\sigma\|\rho) = \mathrm{Tr}(\rho(\log\rho - \log\sigma))$ と定義される．本文では，座標系 $[\eta]$ で表される量子状態 ρ, σ の量子ダイバージェンスは D，この双対座標系 $[\theta]$ で表される ρ^*, σ^* の方は D^* と表記する．これらは，ルジャンドル変換によって互いの座標系を得ることができる．以上の性質より，量子状態空間を ‘距離’ 空間とみなすことができる．

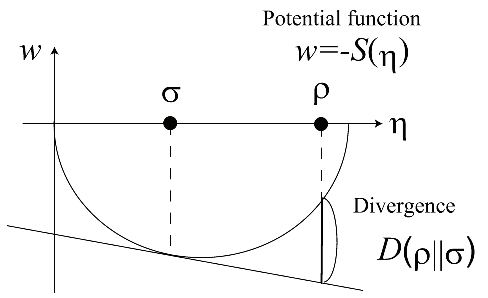

図 1: フォンノイマンエントロピーと量子ダイバージェンスとの幾何学的構造．η はここでは 3 次元を表す．

Theorem 1 量子状態空間で，量子ダイバージェンス $D(\rho\|\sigma)$ の幾何学的構造は図 1 のようになり，$\rho = \rho(\eta)$ および $\sigma = \sigma(\tilde{\eta})$ において，次のように表される．

$$D(\rho\|\sigma) = -S(\rho) - \{\frac{\partial}{\partial\eta_i}(-S(\tilde{\eta}))(\eta_i - \tilde{\eta}_i) - S(\sigma)\}$$

同様に，与えられた母点に対して量子ダイバージェンスを距離とする 2 種類の最遠点ボロノイ図の構造が，それぞれ式 (1) と式 (2) として定義される．最遠点ボロノイ図とは，与えられた母点に関して平面を複数の領域に分割した図である．ある母点とそれが支配する領域内での全ての点との距離は，他の全ての母点との距離よりも等しいか遠い．ボロノイ辺は，隣接する領域を持つ 2 つの母点の境界線である．

$$V_f(\rho_i) = \bigcap_{j \neq i}\{\eta \mid \rho \in B, D(\eta\|\rho_i) \geq D(\eta\|\rho_j)\} \quad (1)$$

$$V'_f(\rho_i) = \bigcap_{j \neq i}\{\eta \mid \rho \in B, D(\rho_i\|\eta) \geq D(\rho_j\|\eta)\} \quad (2)$$

2　計算幾何アルゴリズムの適用

雑音を含む量子通信路 Γ では，入力の量子状態のブロッホ球はアフィン変換によって楕円体へ縮小する．1 量子ビットの Holevo 容量は,

$$C(\Gamma) = \inf_{\eta} \sup_{\rho} D(\Gamma(\rho) \| \Gamma(\eta)),\ (\eta, \rho \in B) \quad (3)$$

と表される [5]．ここで必要なのは $D(\rho \| \eta)$ であり，これは座標内のある点から母点までの量子ダイバージェンスである．したがって，Holevo 容量はこの量子ダイバージェンスの最大値で与えられ，これは楕円体の最小包含球の半径に相当する．最小包含球とは，球の点集合を全て内包する最小の球であり，最遠点ボロノイ図を用いて構成される．すなわち，(2) 式で表される最遠点ボロノイ図によって，最小包含球が計算される．

以下，計算幾何アルゴリズムを適用するために楕円体の離散化の手法 [3] を適用する．この有限個の点集合の最小包含球問題は，[6, 4] に代表される通常のアルゴリズムでのユークリッド距離を量子ダイバージェンスに置きかえて解く．n 個の母点を η_i とするとき次の定理が成り立つ．

Theorem 2 3 次元のブロッホ球に新たに w 軸を加え，関数 $w = -S(\eta)$ と座標 $(\eta_i, -S(\eta_i))$ における接平面 h_i を考える．そのとき，w 軸に関して h_i の下側エンベロープをブロッホ球へ射影した図は n 点の最遠点ボロノイ図となる．

この定理によって，1 量子ビットの量子状態空間において n 個の母点が与えられたときの最遠点ボロノイ図を求める問題が，4 次元で n 枚の超平面の下側エンベロープを求める問題に帰着される．この場合の下側エンベロープは，量子状態空間を接平面で分割したときブロッホ球が存在する側の開空間のことである．

次に，量子状態空間における計算幾何アルゴリズムの計算量を示す．3 次元空間では，ブロッホ球内の高々4 点が最小包含球を決定する．最遠点ボロノイ図を構成する端点のみを母点として，解の候補を絞ることで計算量を減らしている．ボロノイ図に凸包のアルゴリズムを適用することで以下の定理を得る．

Theorem 3 ブロッホ球における n 点のボロノイ図は，$O(\min\{n^2, (n+F)(\log F)^2\})$ 時間で構成される [2]．F は図の面数で，この場合 $F = O(n^2)$ である．

ブロッホ球の最遠点ボロノイ図も同様に与えられ，ブロッホ球の n 点の最小包含球も同じ計算量で得られる．

Theorem 4 ブロッホ球内部の n 点の最小包含球は $O(n)$ 時間で計算される．

参考文献

[1] S.-I. Amari and H. Nagaoka. *Methods of information geometry.* AMS, Oxford University Press, 2000.

[2] T. M. Chan, J. Snoeyink, and C. K. Yap. Primal dividing and dual pruning: Output-sensitive construction of 4-d polytopes and 3-d Voronoi diagrams. *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 18, pp. 433–454, 1997.

[3] M. Hayashi, H. Imai, K. Matsumoto, M. B. Ruskai, and T. Shimono. Qubit channels which require four inputs to achieve capacity: Implications for additivity conjectures. In *10th Quantum Information Technology Symposium (QIT10)*, pp. 89–94, 2004.

[4] N. Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in R and related problems. *SIAM J. Comp.*, Vol. 12, pp. 759–776, 1983.

[5] M. Ohya, D. Petz, and N. Watanabe. On capacities of quantum channels. *Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 17, pp. 170–196, 1997.

[6] E. Welzl. Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). In H. Maurer, editor, *New Results and New Trends in Computer Science*, Vol. 555 of *LNCS*, pp. 359–370. Springer, 1991.