長方形詰込み問題に対する実用的近似解法

PD 今堀慎治

情報理工学系研究科数理情報学専攻

概 要

長方形詰込み問題は, VLSI 設計においてモジュールの配置を決定する問題や, 鉄鋼・繊維産業において大きな母材を注文の大きさに切り分ける問題といった, 実際的な問題と密接な関わりを持つ, 代表的な生産計画問題の 1 つである．この問題に対して, 局所探索法・動的計画法に基づく実用的な近似解法を与える.

1 はじめに

長方形詰込み問題は, 様々な大きさの長方形 (製品) を二次元平面 (母材) 上に重なりなく配置する問題であり, 幾何学や組合せ最適化の分野で古くから研究されてきた．また, 多くの実際的な問題とも密接な関わりを持つ NP 困難問題であり, 実用的な近似解法が必要とされている．本研究では, 中武らによって提案された解表現方法 [2] と, 我々が提案した効率的な近傍解評価法 [1] に基づく, 実用的な近似解法を提案する.

2 問題定義と解の表現方法

入力として, 長方形集合 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ が与えられ, 各長方形 $i \in I$ に対し幅 w_i と高さ h_i が与えられる．このとき, 長方形が互いに重ならないように, 全ての長方形 (製品) を覆う長方形 (母材) の面積を最小化するような, 各長方形 i (の左下隅) の座標 (x_i, y_i) を求める問題を考える．ただし, 長方形の回転は許さないものとする．ここで, 長方形が互いに重ならないという制約条件は, 全ての長方形対 $i, j \in I$ に対して, 次の 4 条件のうち 1 つ以上が成立することと等価である.

$$\begin{aligned} x_i + w_i \leq x_j, \quad y_i + h_i \leq y_j, \\ x_j + w_j \leq x_i, \quad y_j + h_j \leq y_i. \end{aligned} \tag{1}$$

この問題を考える上で, どのように解を表現するかが非常に重要であるが, 本研究では, BSG (bounded-sliceline grid) 表現 [2] を用いる．BSG とは, 水平および垂直な 2 単位長の仕切りが平面を部屋に細分した構造であり, 任意の 2 つの部屋の間には一意に相対的位置関係が定義される．図 1 で網掛けされた部屋に対して, r と記されている部屋は右 (right) にあると定義する．a は上 (above), l は左 (left), b は下 (below) で同様である．なお, この構造は平面全体において定義されるが, その一部分を切り取ったものを $\mathrm{BSG}_{p \times q}$ と呼ぶ.

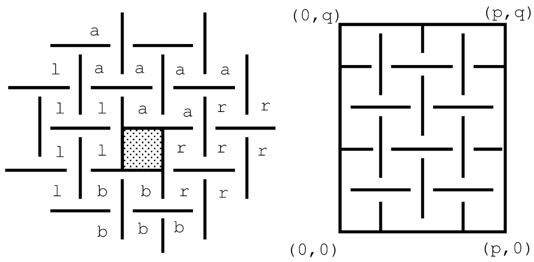

図 1: BSG (左) と $\mathrm{BSG}_{p \times q}$ (右)

次に, $\mathrm{BSG}_{p \times q}$ の各部屋に高々1 つの長方形を割当てる．各長方形対に対して, 部屋の相対位置関係を引き継がせることで, 長方形間の位置関係 (1) が定まる．この条件のもとでの最適な配置は, 水平・垂直制約グラフ (図 2 参照) を用いて, $O(pq)$ 時間で計算可能である．ただし, 各枝の長さは対応する部屋に割当てられた長方形の大きさによっ

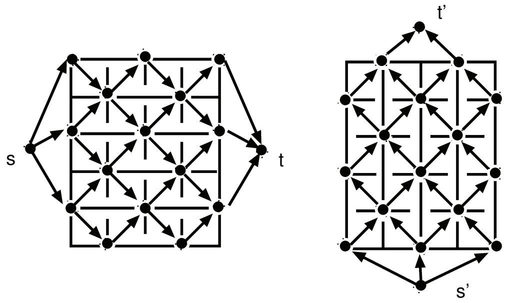

図 2: 水平・垂直制約グラフ

て定まる (長方形が割当てられていない部屋は枝長 0). 各長方形の座標は s (s') からの最長パスの長さによって定まり, 全体を覆う長方形の幅 (高さ) は, s-t (s'-t') 最長パス長となる.

3　アルゴリズム

$\mathrm{BSG}_{p\times q}$ に対する長方形の割当ては, 局所探索法によって行う. 局所探索法は, 現在の解の近傍内に改善解があれば移動する, という操作を可能な限り反復する方法であり, 近傍とは, 現在の解に微小な変更を加えることによって得られる解集合である. 本研究で用いるシフト近傍は, 一つの長方形を選択し, これを空き部屋に移動する操作によって得られる解の集合であり, 近傍のサイズは $O(npq)$ である. なお, 局所探索を 1 度行っただけでは, 未探索の領域にさらに良い解が隠れているという危惧が残るため, 本研究では, より精度の高い解を求めることのできる, 可変近傍探索法も試みている. 以下に, 計算の効率化のために用いているアイディアを紹介する.

3.1　近傍の制限

本研究で用いる解表現, 近傍操作の特徴として, 近傍操作において選択された長方形以外の長方形 ($n-1$ 個) の間の相対的位置関係は変化しないことがあげられる. 従って, 水平, 垂直いずれかの方向の最長パスを構成する長方形のみを近傍操作の対象に限定することで, 解の精度を下げることなく探索の効率化を行うことができる.

3.2　解空間の適応的制御

BSG 表現を用いる場合, n, p, q が解空間, 近傍サイズを規定する. 任意の配置を実現するための p, q に関する必要十分条件は $p, q \geq n$ であるが, 近似解を探索する際には, これより小さい p, q でも十分である. このため, p, q の大きさを探索中に適応的に制御することで, 探索の効率化を図る.

3.3　近傍解評価の高速化

シフト近傍において, 移動する長方形を決定した場合, 近傍解の数は $O(pq)$ となり, これらを独立に評価すると, 全体で $O(p^2q^2)$ 時間が必要となる. しかし, 近傍解は互いに似通った構造を有しており, この性質を利用することで, 解 (一つあたり) の評価を高速に行うことができる場合がある [1]. ここでは水平方向のみを考えるが, 垂直方向も同様に計算可能である.

まず, 移動する長方形 (i とする) を取り除いた $n-1$ 個の長方形に対して, 水平制約グラフを構成し, s から各点まで, 各点から t まで, および s-t 間の最長パスを計算する (動的計画法を利用すると, $O(pq)$ 時間で計算可能である). 次に, 長方形 i を各空き部屋に挿入した解をそれぞれ評価するが, この評価に前述の計算結果を利用することで, s-t 最長パスの長さを, 局所的な計算のみで定数時間で行うことができる. この手法を用いると, $O(pq)$ 個の解の評価を, 全体の計算時間 $O(pq)$ で行うことができる. すなわち, 解一つあたりの平均計算時間が $O(1)$ となる.

参考文献

[1] S. Imahori, M. Yagiura and T. Ibaraki, "Improved local search algorithms for the rectangle packing problem with general spatial costs," *European Journal of Operational Research* (to appear).

[2] S. Nakatake, K. Fujiyoshi, H. Murata and Y. Kajitani, "Module packing based on the BSG-structure and IC layout applications," *IEEE Trans. on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 17 (1998) 519–530.