

# 物理・情報デュアル制御

原辰次\* 津村幸治\* 大石泰章†

\* 情報理工学系研究科システム情報学専攻

† 情報理工学系研究科数理情報学専攻

## 1 有限周波数特性に基づく動的システムの設計

原辰次 (システム情報学専攻)

### 1.1 概要

本研究では、制御理論で重要な KYP (Kalman–Yakubovič–Popov) 補題を一般化した GKYP 補題を導出し、新しい動的システムの設計法を提案してきた [1]。本年度は、より実用的な設計への適用を目指したロバスト GKYP 補題 [2]、時間領域での等価な条件を導出した [3]。この時間領域条件は、GKYP 補題の非線形系/適応制御への拡張に有効である。また設計支援パッケージを MATLAB 上に構築し、提案設計法の有用性を確認した [4]。なお本研究はヴァージニア大学の岩崎徹也助教授との共同研究である。

### 1.2 ロバスト GKYP 補題

変動  $\Delta$  を含む線形時不変系

$$\begin{bmatrix} \lambda x \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, w = \Delta z \quad (1)$$

を考える。このシステムの伝達関数行列を  $G_\Delta(\lambda)$  とする。いま、周波数変数を表す複素数のクラスを

$$\Lambda := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \sigma(\lambda, \Phi) = 0, \sigma(\lambda, \Psi) \geq 0 \} \quad (2)$$

で表す。ただし

$$\sigma(G, \Pi) := \begin{bmatrix} G^* & I_m \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} G \\ I_m \end{bmatrix}$$

このとき、以下の定理が成り立つ [2]。

定理 (ロバスト GKYP 補題) :

システム (1) に対して、 $D_{12} = 0$  と  $\det(I - D_{11}\Delta) \neq 0, \forall \Delta \in \Delta$  が成り立っているとす。このとき、ロバスト有限周波数条件

$$\begin{bmatrix} G_\Delta(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} G_\Delta(\lambda) \\ I_m \end{bmatrix} < 0, \forall \lambda \in \bar{\Lambda}, \Delta \in \Delta \quad (3)$$

が成立するための十分条件は、以下の線形行列不等式を満たすエルミート行列  $P, Q, \hat{\Pi} \in \hat{\Pi}, \Xi \in \Xi$  が存在することである。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \hat{\Pi} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$
$$Q > C_1^* \Xi C_1 \quad (5)$$

この条件の有用性を PID 設計の例を用いて確認している。

### 1.3 GKYP 補題に基づく動的システム設計ツール

GKYP 補題に基づく制御系設計のための解析・設計ツール (LMI 自動生成プログラム) を Matlab 上で開発した [4]。開発したツールは完全に構造化されており、各々の設計仕様を直接的に記述するだけで十分なものとなっている。

## 2 量子ダイナミクスの制御

山本 直樹, 町田 弘, 津村 幸治, 原 辰次 (システム情報学専攻)

### 2.1 背景と目的

本研究では量子情報機器実現の基礎とすべく, 連続測定が可能な量子力学系を念頭に, 量子ダイナミクスのための制御理論の構築とその実用を目指す. なお本研究は, 2004年博士課程修了の山本直樹君が中心となり進めてきた [5] [6] [7].

### 2.2 量子ダイナミクス

連続測定下における量子ダイナミクスとして次のマスター方程式 (SME) を扱う;

$$\begin{aligned} dP &= -i[u(t)H_{fb}, P]dt - i[H, P]dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^M \mathcal{D}[B_k]Pdt + \mathcal{D}[C]Pdt + \mathcal{H}[C]Pdw \\ dy &= \text{Tr}(CP)dt + dw \end{aligned}$$

ここに  $y$ : 出力,  $u$ : 制御入力,  $P$ : 量子状態,  $C$ : オブザーバブル,  $H_{fb}$ : 制御ハミルトニアンである.

### 2.3 量子状態のベクトル表現 /Stratonovich 形式 SME

行列変数を用いた上記 SME から, ベクトルを変数とする確率微分方程式への, 見通しのよい変換を見つけた [5]. さらに伊藤型から Stratonovich 形式への変換を経て, 制御理論の解析ツールを適用することが容易な形式を得た.

### 2.4 量子ダイナミクスの可到達性/可観測性解析

上記ベクトル形式に対して制御理論の解析ツールを適用し, 幾つかの結果を得た [6] [7]. 例えば, 「エネルギー 0, 測定のための量子力学系では, 局所可到達集合の次元は常に 2 以下」である. これは量子ダイナミクスに関する新たな知見である.

### 2.5 低次元量子スピン系の解析/安定化

応用上重要となる低次元量子スピン系に関して, 可到達性/可観測性, 平衡点の安定解析に関する諸結果を得た [6][7]. また 1/2 スピン系の幾つかの場合の安定化コントローラを見いだした [8].

### 2.6 SDP プログラミングによる量子エラー訂正設計

量子エラー訂正問題において, エラーを軽減する最適解の求解を, 上述した量子状態のベクトル表現を用いることにより, SDP (semidefinite programming) に帰着させ, 実用的な計算量によって準最適解が見つけれられることを示した [9].

## 3 量子化データを用いたシステム同定

津村 幸治 (システム情報学専攻)

### 3.1 背景と目的

本研究では量子化された入出力データを用いたシステム同定問題に取り組んできた. 注意すべき点は最適量子化器は推定誤差の規範の選択により変わることがあり, 合理的な規範を吟味しなければならないことである. これを踏まえて本年度は, 量子化データを用いたシステム同定において合理的な誤差規範, もしくはパラメタ推定器について再考し, その妥当性について議論した [10] [11].

### 3.2 問題設定

次に示す SISO MA モデルを対象とする.

$$\begin{aligned} \bar{y}(i) &= q(y_o(i) + w(i)), \quad y_o(i) = \phi(i)\theta, \quad (6) \\ \phi(i) &:= \begin{bmatrix} u(i) & u(i-1) & \cdots & u(i-n+1) \end{bmatrix}, \\ \theta &:= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

$w$  はノイズ,  $q$  は量子化器とする. 量子化がない場合, 入出力データ  $u(i), y(i) = y_o(i) + w(i)$  を

用いた最小2乗法による推定パラメタ  $\hat{\theta}$  は

$$\hat{\theta} = (U^T U)^{-1} U^T Y \quad (7)$$

となる。  $U, Y$  は入出力からなる行列/ベクトルである。本研究では、量子化が施されたデータに対する、最小2乗法および最尤法の意味での合理的推定値について解析した。

### 3.3 最小2乗法

量子化信号  $\bar{y}$  に対応する区間をパラメタ表示し、

$$[\bar{y}](s) := (1-s)\bar{y}^l + s\bar{y}^u, 0 \leq s \leq 1 \quad (8)$$

と表す。(8)に対する和、積の演算、および内積、2ノルムを定義する。この準備のもと、 $Y = \bar{Y}$  とした場合の(7)が  $\|[\bar{Y}] - [U\hat{\theta}]\|_2$  の意味で最適値であることを示した。

### 3.4 最尤推定

量子化データ  $\bar{y}(i)$  が観測される時、パラメタ  $\theta$  の尤度は次に与えられる。

$$P([\bar{y}](i)|\theta) = \int_{[\bar{y}]} f_w(y - (U\theta)_i) dy. \quad (9)$$

量子化器の解像度が十分高いとき、 $\bar{y}$  を区間  $[\bar{y}](i)$  の中点とするならば、(9) は次で近似できる。

$$P([\bar{y}](i)|\theta) \sim g^{-1}(\bar{y}(i)) f_w(\bar{y}(i) - (U\theta)_i).$$

$w(i)$  が独立のとき、データ列  $\{\bar{y}(i)\}$  を観測する確率は  $\prod_{i=1}^N P([\bar{y}](i)|\theta)$  となる。この最大値を与える最尤推定値は、 $y = \bar{y}$  とし、量子化を考慮しない場合の最尤推定値と一致することを示した。

## 4 パラメータ依存 Lyapunov 関数を使ったロバスト制御器の確率的設計

大石 泰章 (数理情報学専攻)

### 4.1 目的

非線形なパラメータ的不確かさが存在する場合のロバスト制御系設計は、古典的ではあるが依然

として難しい問題である。本研究ではできるだけ保守的でない制御系設計をするために、パラメータ依存 Lyapunov 関数を使って定式化し、前年度に構成した確率的算法を拡張して適用することを考える。

### 4.2 定式化

パラメータ依存 Lyapunov 関数を使う場合、ロバスト制御系の設計問題は次のように表現できる。ただし、 $V(x, y, \theta)$  は  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$  の対称行列値の関数であり、 $x$  と  $y$  に関してアフィンであって、 $\theta \in \Theta$  の対称行列値の関数  $V_0(\theta), V_1(\theta), \dots, V_{n+m}(\theta)$  を使って

$$V(x, y, \theta) = V_0(\theta) + \sum_{i=1}^n x_i V_i(\theta) + \sum_{i=1}^m y_i V_{n+i}(\theta)$$

と表されるとする。

問題。任意の  $\theta \in \Theta$  に対して

$$V(x, y, \theta) < 0$$

を満たす  $y \in \mathbb{R}^m$  が存在するような  $x \in \mathbb{R}^n$  を求めよ。ただし、 $y$  は  $\theta$  に依存してもよい。□

ここでパラメータ  $\theta$  に依存しない変数  $x$  は求める制御器に対応し、パラメータに依存する変数  $y$  は Lyapunov 関数に対応する。

以上の問題は、関数  $V$  が変数  $y$  に依存しないという特別な場合に前年度に考察したパラメータ依存線形行列不等式に一致し、既にこれを解くための確率的算法が構成されている。本研究ではこれを拡張し、 $V$  が  $y$  に依存する場合にも使えるような確率的算法の構成を行なう。

### 4.3 結果

パラメータ  $\theta$  に依存する変数  $y$  が存在する場合に使える確率的算法を構成した。

まず、変数  $x$  とパラメータ  $\theta$  を固定するとき、 $V(x, y, \theta) < 0$  を満たす  $y \in \mathbb{R}^m$  が存在するということは、

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} \bar{\lambda}[V(x, y, \theta)] < 0 \quad (10)$$

と同値であることを注意する．ただし  $\bar{\lambda}(A)$  は対称行列  $A$  の最大の (最も正の) 固有値を表すものとする．式 (10) の左辺  $\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} \bar{\lambda}[V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})]$  は  $\mathbf{x}$  に関して凸であるので，あとはこの関数の劣勾配さえ計算できれば，前年度構成した確率的算法が使えることになる．ところが，この関数の値は半正定値計画問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \lambda \quad \text{in } (\lambda, \mathbf{y}) \\ & \text{subject to } V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) - \lambda I \preceq O \end{aligned}$$

の最適値であることを注意すると，その双対問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \text{tr}[UV(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\theta})] \quad \text{in } U \\ & \text{subject to } U \succeq O, \quad \text{tr} U = 1, \\ & \text{tr}[UV_{n+i}(\boldsymbol{\theta})] = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

の最適解  $U$  を使って求める劣勾配が計算できることがわかる．

以上の考察に基づき，前節の問題に対する確率的算法を構成した．構成した算法は，問題のサイズの多項式で表される数の繰り返しの後に停止し，ほとんどの  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  に対して

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \prec O$$

を満たす  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  が存在するような  $\mathbf{x}$  を高い信頼度で求めるか，またはそのような  $\mathbf{x}$  が近似的な意味で存在しないことを検出する．

## 参考文献

- [1] T. Iwasaki and S. Hara: Generalized KYP Lemma: Unified Frequency Domain Inequalities with Design Applications, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **50** (2005), 41–59.
- [2] S. Hara, D. Shiokata and T. Iwasaki: Fixed Order Controller Design via Generalized KYP Lemma, *Proc. IEEE Conf. Contr. Appl.*, 2004.
- [3] T. Iwasaki, S. Hara and A. L. Fradkov.: Time Domain Interpretations of Frequency Domain Inequalities on (Semi)Finite Ranges, *Systems & Control Letters*, to appear.
- [4] D. Shiokata, S. Hara and T. Iwasaki: From Nyquist/Bode to GKYP Design: Design Algorithms and CACSD Tools, *Proc. SICE Annual Conf.*, 2004.
- [5] 山本直樹, 津村幸治, 原辰次: 量子力学的システムの制御ダイナミクスモデル, 計測自動制御学会論文集, **40** (2004), 231–240.
- [6] 山本直樹, 津村幸治, 原辰次: 量子制御ダイナミクスの平衡点解析, 計測自動制御学会論文集, **40** (2004), 693–702.
- [7] 山本直樹, 津村幸治, 原辰次: 量子制御ダイナミクスの局所可到達性と局所可観測性, 計測自動制御学会論文集, **40** (2004), 1078–1087.
- [8] N. Yamamoto, H. Machida, K. Tsumura and S. Hara: Local Reachability and Feedback Control of Quantum Spin Dynamics, *The 33rd SICE Symposium on Control Theory*, 57–62, 2004.
- [9] N. Yamamoto, S. Hara and K. Tsumura: Suboptimal Quantum-error-correcting Procedure Based on Semidefinite Programming, *Physical Review A*, to appear (2005).
- [10] K. Tsumura: System Identification Methods with Quantized Data, *The 33rd SICE Symposium on Control Theory*, 209–214, 2004.
- [11] K. Tsumura: Criteria for System Identification with Quantized Data and the Optimal Quantization Schemes, *Technical Report of The Univ. Tokyo*, METR 2005–03 (2005).