超ロバスト幾何計算

杉原厚吉　西田徹志　松浦史郎
情報理工学系研究科数理情報学専攻

1　はじめに

幾何アルゴリズムは，一般に数値誤差に対して脆弱である．なぜなら，数値計算の誤差によって，位相構造の判定を誤ると，ユークリッド幾何ではあり得ない状況に陥り，アルゴリズムが破綻してしまうからである．この危険性は，数値誤差がどれほど小さくても起こり得るものであるため，実用的ソフトウェアを作る際のボトルネックとなっている．

私達の研究グループは，この困難を克服するために，ロバストなソフトウェアの設計法を開発してきている．本年度の研究成果は，以下に示すとおりである．

2　ディジタル位相優先法

私達の研究グループでは，以前から，位相構造の一貫性を数値情報より優先させることによってロバスト性を確保する幾何アルゴリズム設計法「位相優先法」を開発し，それを応用して多くのロバストソフトウェアを蓄積してきた．この設計法は，完全なロバスト性が確保でき，しかも処理速度が劣化しないという利点をもつ．しかし，設計の際に，扱う対象の位相的不変性を抽出しなければならないため，問題ごとの洞察が必要で，初心者には利用しにくいものであった．

今年度は，この位相優先法を，初心者でも使えるやさしいアルゴリズム設計法へ改良した．その基本的アイデアは次のとおりである．

位相優先法では，まず解きたい幾何問題の対象がもつ純粋に組合せ位相的性質を抽出しなければならなかった．そして，これが初心者にはむずかしかった．この難しさを回避するために，問題の解のディジタル画像近似を求め，次に，そこから位相構造を取り出し，最後にその位相構造に基づいて解を計算する．

幾何問題をディジタル画像近似を用いて解くことは，多くの問題に対して共通の方法でほぼ機械的に実行できる．したがって，問題ごとの個別の工夫がいらないため，初心者にも使える技術となった．

このアイデアを，特許申請 [6] すると同時に，ユークリッド距離円ボロノイ図の構成アルゴリズムなどに適用し，その有効性を確認することができた [5]．今後は，球ボロノイ図など 3 次元の幾何構造の計算アルゴリズムにもこの方法を適用していく予定である．

3　ボート航行距離方程式のロバスト解法

昨年度の研究において以下を行った．流れを伴う 2 次元水面上に 2 点，始点と終点が与えられとき，ボートが始点から終点まで動くのにかかる最短時間をボート航行距離と呼び，この距離を求める問題を時間項を含まない偏微分方程式の境界値問題に帰着した．この方程式をボート航行距離方程式と名付けた．この方程式は幾何光学などで知られる eikonal 方程式の拡張になっている．Eikonal 方程式は Fast Marching 法という数値解法によって，効率的かつ安定に解くことができるので，その手法をボート航行距離方程式に適用したが，うまく機能しなかった．そこで，我々の方程式を効率的かつ安定に解くことができるように

改良した拡張 Fast Marching 法を考案した．

本年度は，ボート航行距離方程式の次元の一般化，具体的には，流れを伴う曲面上における最短距離を求めるための偏微分方程式の構築を行った．ボート航行距離は，その作り方から 2 次元から 3 次元への拡張は容易であるので，方程式を 3 次元にし，領域を曲面に制限することで解くことができる．しかし，本研究では，曲面を平面に射影することにより，新たな方程式の構築を行った．なぜなら，次元を減らせることや，拡張 Fast Marching 法を利用することができるからである．

$\Omega \in \mathbf{R^2}$ を xy 平面上の領域，$z = h(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ を曲面の高さとする．曲面は微分可能とし，その偏微分を

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) \equiv (h_x, h_y)$$

とする．さらに，曲面上には，曲面に沿う流れ $f(x, y, z) \in \mathbf{R^3}$ が与えられているとする．

流れがなければ速さ $F(x, y, z)$ で航行できるボートがこの曲面上を移動するとする．ただし，各点で $F > |f|$ を仮定する．p, q を Ω 上の点とし，曲面上の対応する点をそれぞれ $(p, h(p))$，$(q, h(p))$ とする．このとき，$(p, h(p))$ から $(q, h(q))$ へ移動するのに必要な最短時間を「曲面上のボート航行距離」と呼ぶ．

曲面上のボート航行距離を解析的に求めることは難しいので，近似計算に頼らざるを得ない．そこで，偏微分方程式を利用をするのだが，ここでは平面に射影して解く．つまり，ボートは曲面上を移動するのだが，それを射影した平面上で書き表すことを考える．

時刻 0 に $p_0 \in \Omega$ にいるとし，このボートの点 $p = (x, y)$ までの到達時間を $T(x, y)$ とする．ボートが最短時間を達成する経路に沿って進み，時刻 t で (x, y) を通過し，時刻 $t + \Delta t$ では，$(x + \Delta x, y + \Delta y)$ を通過するとすると，

$$\Delta t = T(x + \Delta x, y + \Delta y) - T(x, y)$$

と表わすことができる．そして，右辺第 2 項をテイラー展開すると

$$\Delta t = T_x \Delta x + T_y \Delta y + \mathrm{O}((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \quad (1)$$

となる．ただし，T_x, T_y は，それぞれ T の x, y 方向への偏微分を表わす．

次に，曲面上の動きを射影したときの Ω 上での動きを考える．N を曲面の法線ベクトル，S を曲面上の点 $(p_0, h(p_0))$ からの等時間曲線 Γ に対する接ベクトルとする．このとき，最短時間を達成するためには，ボートは Γ に対して入射角が垂直になるように進むのがよい．よって，時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ の間のボートの変位は，$F(N \times S) + f\Delta t$ と書ける．ただし，法線ベクトルは $N = (-h_x, -h_y, 1)/\sqrt{1 + {h_x}^2 + {h_y}^2}$, 接ベクトルは

$$S = \frac{(T_y, -T_x, h_y T_x - h_x T_y)}{\sqrt{T_x^2 + T_y^2 + (h_y T_x - h_x T_y)^2}}$$

である．

$f = (f_x, f_y, f_z)$ と置くと，$F(N \times S) + f\Delta t$ を Ω 上へ射影したときの x 成分，y 成分は，それぞれ

$$\Delta x = \left\{ F \frac{(1 + h_y^2) T_x - h_x h_y T_y}{k} + f_x \right\} \Delta t, \quad (2)$$

$$\Delta y = \left\{ F \frac{(1 + h_x^2) T_y - h_x h_y T_x}{k} + f_y \right\} \Delta t \quad (3)$$

となる．ただし，

$$k = \sqrt{(1 + h_x^2 + h_y^2)(T_x^2 + T_y^2 + (h_y T_x - h_x T_y)^2)}$$

である．

式 (1)，(2)，(3) により，

$$F \sqrt{\frac{(1 + h_y^2) T_x^2 - 2 h_x h_y T_x T_y + (1 + h_x^2) T_y^2}{1 + h_x^2 + h_y^2}} = 1 - T_x f_x - T_y f_y \quad (4)$$

を得る．

式 (4) を $T(p_0) = 0$ の境界条件をもとで解くことによって，曲面上のボート航行距離を求めることができる．

これにより，航路や飛行路の最短経路問題に応用が期待される．タンカーや船が海を航行するとする．そのとき，海の表面は海流を伴う曲面である．また，長距離を飛ぶ飛行機は，気流に影響さ

れながら，ほとんどの時間をある決められた高度を保ちつつ移動する．ゆえに，これも流れを伴う曲面となる．

今後は，$F > |f|$ と仮定していた条件を取り除いても効率的かつ安定に解くことのできる手法の開発を行っていきたい．

4 長方形詰込み問題に対する実用的近似解法

長方形詰込み問題は，VLSI 設計においてモジュールの配置を決定する問題や，鉄鋼・繊維産業において大きな母材を注文の大きさに切り分ける問題といった, 実際的な問題と密接な関わりを持つ，代表的な生産計画問題の 1 つである．この問題に対して，局所探索法・動的計画法に基づく実用的な近似解法を与えた [1].

さらに詳しい内容については，本報告書の PD 今堀慎治の成果報告を参照されたい．

5 Navier-Stokes 方程式に対する超ロバスト無反射境界

音波をはじめとする波のシミュレーションは，近年の自動車や航空機の設計の場では欠かせないものとなっている．このような計算を行う際，広大な現実の空間に比べて計算機の中で扱える領域は高々有限であるため，計算対象領域は有限で打ち切らなくてはならない．

このとき，打ち切られた断面という本来は存在しない境界ができてしまい，この境界からの反射波を除去できるかどうかは現象を正しく模擬できるかどうかを左右する．そこで，無反射境界条件，すなわち，反射波の生成を防ぐ境界条件が重要となる．

無反射境界条件は既にいくつか提案されているが，既存の方法は本質的に 1 次元的であるという問題点を抱えていた．本研究では，この問題を改善し，流れの多様性，人的ミス，実装時の離散化等に対してロバストな，超ロバスト無反射境界条件を提案した [7].

さらに詳しい内容については，本報告書の RA 谷口隆晴の成果報告を参照されたい．

6 拡張 SSA

立体形状のメッシュデータをスペクトル分解することは，幾何データ圧縮，図形検索など多くの応用をもつ重要な課題である．しかし，今まで，そのための十分強力な手法はなかった．スペクトル分解の代表的手法としては，特異スペクトル分析 (SSA)，フーリエ解析，ウェーブレット解析などがある．しかし，SSA は 1 次元しか扱えない．また，フーリエ解析やウェーブレット解析を多次元のデータに適用するためには，大域座標が必要となるが，一般の立体形状にはそのような座標系はとれない．

この困難を克服し，任意の立体形状に対して適用できる多次元スペクトル分解法を，SSA を拡張することによって開発した．これは SSA の軌道行列を一般化するとともに，それに合うように分解過程も一般化したものである．これを「拡張 SSA」と名づけ，立体形状データのための電子透かし，立体形状データの補間，類似形状パターンの検索，画像検索などに適用してその有効性を確認しつつある [4].

この成果のさらに詳しい内容については，RA 室谷浩平の成果報告を参照されたい．

7 細分割面の一般化

立体の細分割曲面は，簡単な操作で複雑な形状を表現することのできる有益な手法である．しかし，従来の細分割曲面は，すべて頂点の生成と更新によって実現されている．このことに着目し，頂点以外の幾何構成要素である面や稜の更新作業によって実現される細分割曲面構成法を開発した．

面に基づいた細分割曲面は，面と頂点の双対性によって，頂点に対する従来の操作を見直すことによって実現できた [2]．一方，稜に基づく細分

割曲面は，直線のプリュッカー座標によって作られるクライン多様体上での点の操作によって実現できた [3]．現在，これら三種の細分割曲面構成法を，統一的視点から体系化しつつある．

詳しい内容については，本報告書の RA 川原田寛の成果報告を参照されたい．

8 ボロノイ図とその応用国際シンポジウム

超ロバスト幾何計算サブプロジェクトが中心となって，2004 年 9 月 13 日から 15 日まで，International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering を東京大学において開催した．2 件の招待講演と 22 件の一般講演が行われ，約 70 名の参加者があった．この会議は，今回を 1 回目として，毎年，世界のどこかで行うことが決まり，この分野の国際的中心としての役割を果たすことができた．

参考文献

[1] Shinji Imahori, Mutsunori Yagiura, Shunji Umetani, Shinya Adachi and Toshihide Ibaraki: Local Search Algorithms for the Two Dimensional Cutting Stock Problem with a Given Number of Different Patterns. *Metaheuristics: Progress as Real Problem Solvers*, 2005.

[2] Hiroshi Kawaharada and Kokichi Sugihara: Dual Subdivision — A New Class of Subdivision Schemes Using Projective Duality. METR 2005-01, Department of Mathematical Iniformatics, University of Tokyo, 2005.

[3] Hiroshi Kawaharada and Kokichi Sugihara: Line Subdivision. METR 2005-02, Department of Mathematical Iniformatics, University of Tokyo, 2005.

[4] Kohei Murotani and Kokichi Sugihara: Watermarking 3d Polygonal Meshes Using Generalized Singular Spectrum Analysis. *NICOGRAPH International Conference 2004*, pp. 121–126.

[5] Kokichi Sugihara: Robust Geometric Computation Based on Digital Topology. *Proceeding of the 10th Conference on Computing and Combinatorics*, COCOON2004, Teju, Korea, Augurst 17–20, 2004, pp. 3–12.

[6] 杉原厚吉，松浦史郎: 勢力圏図計算装置及びプログラム. 特許出願, 特願 2004-230652, 2004 年 8 月 6 日.

[7] 谷口隆晴，杉原厚吉: 特性曲線法に基づく無反射境界条件の提案とその実装法. 第 18 回数値流体力学シンポジウム, B2-3, 2004.