

動的遠隔制御を実現する基礎理論の構築

津村 幸治 原 辰次

情報理工学系研究科システム情報学専攻

1 はじめに

ダイナミクスの関わる VR の実現の中では、遠隔制御理論は重要な要素技術である。特に VR システムでは信号伝達の容量制限の存在は必然であり、制御システムの構造の中に、有限の通信容量の伝送線が含まれることとなる。以上を背景とし本研究では、昨年度に引き続き遠隔制御システムにおける信号の伝送系の容量とシステムの性能の関係に焦点をあて、適切な制御理論上の研究のサブテーマを設定し、それぞれの解決を試みる。

2 不確かさのある線形システムに対する量子化信号を用いた適応制御 [1]

早川朋久, 石井秀明, 津村幸治 (システム情報学専攻)

昨年度までの研究においては、通信容量に制限のある状況下における、既知の制御対象の安定化問題を考えてきた。しかし現実には制御対象の一部の情報が未知であることが普通であり、そのような状況下に対応する制御系設計の開発が求められる。本年度は量子化信号を用いた適応制御の設計法を開発することにより、本課題の克服を目指した。

ここでは次の不確かさを含む離散時間線形システム \mathcal{G} に対し、量子化された制御入力信号を用いた適応制御を考える。

$$x(k+1) = Ax(k) + Bv(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

ただし $x(k) \in \mathbb{R}^n$: 状態ベクトル, $v(k) \in \mathbb{R}^m$: 制御入力, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ である。ここで入力ベクトル $v(k)$ は制御器側から量子化されて転送され、受取り先のプラント側で復号される。特に $v(k)$ は

$$v(k) = q(k, u(k)), \quad (2)$$

で与えられるものとする。ここで $q(\cdot, \cdot)$ は時変対数型量子化関数

$$q_i(k, u_i) =$$

$$\begin{cases} a_i(k)\rho_i^j(k), & \text{if } u_i \in (a_i(k)\rho_i^{j+1}(k), a_i(k)\rho_i^j(k)), \\ -a_i(k)\rho_i^j(k), & \text{if } u_i \in [-a_i(k)\rho_i^j(k), \\ & -a_i(k)\rho_i^{j+1}(k)), \\ 0, & \text{if } u_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

であり、 $u(k)$ は量子化器への入力で、

$$u(k) = H(k)x(k), \quad (4)$$

で与えられる。ただし $a_i(k) > 0, i = 1, \dots, m, 0 < \rho_i(k) < 1, i = 1, \dots, m$, で、 $q_i(\cdot, \cdot)$ と u_i は i 番目の要素を表す。なお $\rho_i(\cdot)$ は量子化器 $q_i(\cdot, \cdot)$ の「粗さ」を表すことに注意する。

対数型量子化器 (3) は、時変のセクターバウンドを持つ、メモリレスの非線形特性 \mathcal{Q} :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &\triangleq \{q : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : q(\cdot, 0) = 0, \\ & [q(k, u) - M_1(k)u]^T [q(k, u) - M_2(k)u] \leq 0, \\ & u \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N}_0\}, \end{aligned} \quad (5)$$

のクラスに含まれる。ただし $M_1 \triangleq \text{diag}[M_{11}, \dots, M_{1m}] > 0$ と $M_2 \triangleq \text{diag}[M_{21}, \dots, M_{2m}] > 0$ は $\rho_i = M_{1i}/M_{2i}, i = 1, \dots, m$ と $M_2 - M_1$ が正定となるものである。この \mathcal{Q} を規定するセクター条件は、

$$M_{1i}(k)u_i^2 \leq q_i(k, u_i)u_i \leq M_{2i}(k)u_i^2, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

とも表現できる。

次の関係 $\rho_i(\cdot) = M_{1i}(\cdot)/M_{2i}(\cdot), i = 1, \dots, m$, より、量子化器 $q_i(\cdot, \cdot)$ の粗さは $M_{2i}(\cdot) - M_{1i}(\cdot), i = 1, \dots, m$, により定まる。なお $q(k, \cdot)$ の時変特性は、ただ $M_1(k)$ と $M_2(k)$ のそれらにのみ依存するが、表現の簡単のため $q(k, u(k))$ と書くことにする。

システム (1) に対して適応制御器を設計するため、量子化器 $q(\cdot, \cdot)$ を次のように線形部と非線形部とに分解する。

$$q(k, u) = M(k)u + q_s(k, u), \quad (7)$$

ただし $M(k) \triangleq \frac{1}{2}(M_1(k) + M_2(k))$. 非線形部 $q_s(\cdot, \cdot)$ は、次の関数のクラス \mathcal{Q}_s に属することに注意する.

$$\mathcal{Q}_s \triangleq \{q_s : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : q_s(\cdot, 0) = 0, \\ q_s^T(k, u)q_s(k, u) - \frac{1}{4}u^T(M_2(k) - M_1(k))^2u \leq 0, \\ u \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N}_0\}. \quad (8)$$

ここでの制御目的は、(4)の形式の適応制御器と、通信路を通る信号のビットレートを低減する量子化器を設計することである. そこでシステム行列 A が不確かな場合に対応する次の結果を得た. 行列 B が不確かな場合も同様に導くことが可能であるが、ここでは省略する. なお以下の定理において、 $\mathcal{A} \triangleq \{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \tilde{A} = A + BK_{g1}, K_{g1} \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$ とする.

定理

(1) 式で与えられる不確かな線形システム \mathcal{G} を考える. ただし $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は不確かな行列, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は $\text{rank } B = m$, また (A, B) は可制御とする. ここで $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を次のリッカチ方程式の正定解とする.

$$P = \tilde{A}^T P \tilde{A} + R - \tilde{A}^T P B (B^T P B)^{-1} B^T P \tilde{A}, \quad (9)$$

ただし $P \geq I_n$ で $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ と $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は正定とする. さらに $A_s \triangleq \tilde{A} + BK_{g2}$, ただし $K_{g2} \triangleq -(B^T P B)^{-1} B^T P \tilde{A}$ とし, また $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ と $\varepsilon \in \mathbb{R}$ は $Q > 0$ および $\varepsilon > 0$ で,

$$\tilde{R} \triangleq \frac{1}{\varepsilon}(I_m - Q) - B^T P B \geq 0. \quad (10)$$

を満たすものとする. このとき, 量子化器 (2) を伴った適応フィードバック制御則は

$$u(k) = M^{-1}(k)K(k)x(k), \quad (11)$$

で与えられる. ただし $K(k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M_1(k)$ および $M_2(k)$ は次を満たす.

$$R - \frac{1}{4\varepsilon}K^T(k)(M_2(k) - M_1(k))^2M^{-2}(k)K(k) \geq \gamma I_n > 0, \quad (12)$$

ただし $k \in \mathbb{N}_0$ で $\gamma \in \mathbb{R}$ は任意の十分小さな定数である. また更新則は,

$$K(k+1) = K(k) - \frac{1}{1+x^T(k)Px(k)}QB^\dagger[x(k+1) \\ - A_sx(k)]x^T(k), \quad K(0) = K_0, \quad (13)$$

である. 以上の制御器は閉ループシステム (1), (11), (13) の解 $(x(k), K(k)) \equiv (0, K_g)$, がリアプノフ安定であること, つまり, $x(k) \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ for all $x_0 \in \mathbb{R}^n$ を保証する. ただし $K_g \triangleq -(B^T P B)^{-1} B^T P A$ である.

本結果を適用した数値例を参考までに示す. 制御対象は3次の不安定系で伝達関数のパラメータが全て不明とする. これに対し, 上記定理に基づいて適応制御器および適応量子化器を設計した. 数値シミュレーションでは時刻 $k = 30$ から適応制御器を動作させた. $k = 30$

以降に適応ゲイン $K(k)$, 量子化器を決定する $M_2(k)$ が変動を始め, 制御対象の状態変数が整定されていくのが見て取れることから, 本手法が有効に機能していることがわかる. 詳細は紙面の都合上省略する.

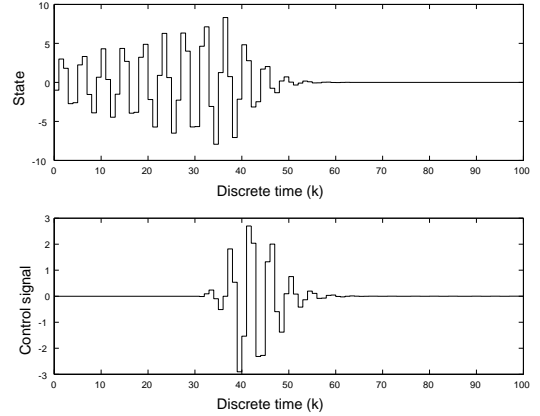


Fig. 1 State trajectory and control signal versus time

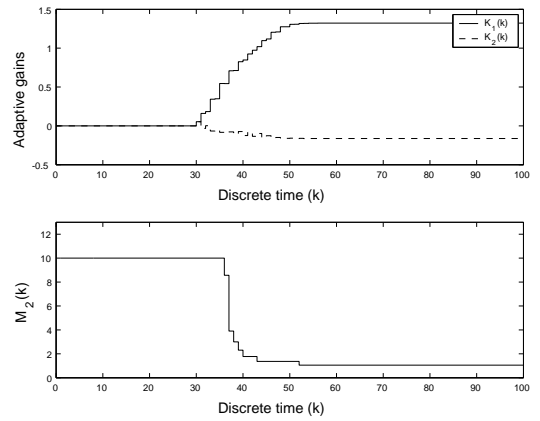


Fig. 2 Adaptive gain history and profile of $M_2(k)$

3 周期時変2自由度サーボ系設計法 [4]

丹下吉雄, 津村幸治 (システム情報学専攻)

一般に周期時変制御器は, 高性能が期待できる時変制御器のクラスの一つである. また周期的動作により制御器と制御対象との間で交わす信号の情報量を軽減することが可能となる. 以上を背景に本研究では昨年度来, 周期時変制御器の性能解析の研究を進めている. 本年度は2自由度系に焦点をあて, 周期的重みのついた2自由度制御系の設計手法の提案とその解析を行った.

3.1 2自由度制御系

Fig. 3 に示すように, フィードフォワード/フィードバックの2つの制御器が設計可能なとき, これを2自

自由度系という．2自由度制御系は参照信号 r への追従特性を改善するのに有効である．本研究では各制御器を周期時変とし，線形時不変 (LTI) の制御対象 P に対するサーボトラッキング性能を改善する手法を考える．なお Fig. 3 において， r は参照信号， y はプラントの出力， e は追従誤差である． Σ_2 は後述する周期的積分器である．

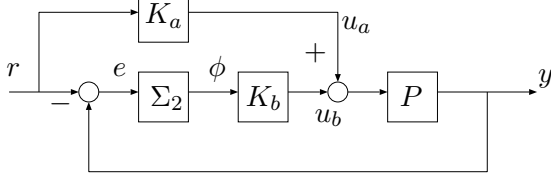


Fig. 3 Two-degree-of-freedom control scheme

閉ループの安定性を達成するフィードバック制御器 K_b の Youla Parameterization を用いると， r から ϕ への伝達関数 T は次となる．

$$\phi = Tr = T_b \cdot T_a r, \quad (14)$$

$$T_a = I - PK_a = I - NK'_a, \quad (15)$$

$$T_b = (I + \Sigma_2 PK_b)^{-1} \Sigma_2 = T_1 - T_2 QT_3, \quad (16)$$

ここで $N, T_1, T_2, T_3 \in \mathbf{RH}_\infty$ であり， N は P の右既約因子， Q, K'_a が安定な自由パラメタである．制御目標はトラッキング性能の最適化であり次となる．

P0. Find K'_a^* and Q^* such that

$$\begin{pmatrix} K'_a^* \\ Q^* \end{pmatrix} = \arg \min_{K'_a, Q: \text{stable}} \|T_b[Q] \cdot T_a[K'_a]\|.$$

3.2 周期的積分器

ここでは周期時変システムに対して，内部モデル原理を満たす積分器について説明する．まず周期信号を取り扱うのに有用なリフト作用素を導入する． r 次元離散時間信号空間 l^r に関し，リフト作用素 W を次式で定義する [2].

$$W_N : l^r \rightarrow l^{rN} :$$

$$\alpha(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^{-i} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{Nj} z^{-j} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{Nj+1} z^{-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{Nj+N-1} z^{-j} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

さらに， $\alpha^{(i)}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{Nj+i} z^{-j}$ ， $i = 0, \dots, N-1$ に対して， W_N の逆差要素 W_N^{-1} をつぎに与える．

$$W_N^{-1} : l^{rN} \rightarrow l^r : \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(0)}(z) \\ \vdots \\ \alpha^{(N-1)}(z) \end{pmatrix} \rightarrow \alpha(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha^{(i)}(z^N) z^{-i}. \quad (19)$$

以上の準備のもと，“周期的積分器”を以下で定義する．

定義

N 周期的積分器 Σ_N とは，信号空間 l^r に対し次の性質を有するシステムとする．

$$\forall u(z) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i z^{-i} \in l^r, \quad (20)$$

$$W_N \Sigma_N u = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} u_{N \cdot i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} u_{N \cdot i+1} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty} u_{N \cdot i+N-1} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

特に2周期的積分器 Σ_2 は以下で与えられる．

$$W_2 \Sigma_2 W_2^{-1} := \begin{pmatrix} z & 0 \\ z^{-1} & 0 \\ 0 & z \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \otimes I_r \quad (22)$$

(22) を逆リフト変換することにより，つぎを得る．

$$\Sigma_2(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1} I_r. \quad (23)$$

このことから Σ_2 は結果的に LTI システムとなる．この事実は，Fig. 3 における制御器 K_b および K_a から見た残りの系は，LTI であることを意味する．よって K_b を (16) にある通常の Youla parameterization により設計することが可能である．制御器の自由パラメタ Q は以下で定義されるクラスから選ぶものとする．

$$\mathcal{Q}^p := \{Q \mid Q : \text{causal}, W_2 Q W_2^{-1} \in \mathbf{RH}_\infty\}. \quad (24)$$

周期的積分器の役割を示す次の命題が成り立つ．

命題

Fig. 3 中の参照信号 r が有限な定数ベクトルであり，かつ制御器のパラメタ Q, K'_a が集合 \mathcal{Q}^p の要素であるならば，追従誤差 e は 0 に収束する．

3.3 LPTV 制御系設計法

前節までの準備のもと，[3] で提案した周期的重みつきモデルマッチング問題の解法を適用し，2自由度系における K_a, K_b を2段階で設計可能な一手法を提案する．

本研究では以前，因果的周期時変システム全てを表現できる双対なリフト形式 [3] を提案し，LPTV 制御器

に関する周期的な重みつきモデルマッチング問題が LTI モデルマッチング問題へと帰着できることを示した。本年度はこの結果を 2 自由度制御系設計に応用する。

まず, W を用いて射影作用素 Pr^i を次に導入する。

$$\text{Pr}^i := W^{-1} E_{i+1} E_{i+1}^T W. \quad (25)$$

ただし,

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_i := e_i \otimes I_r.$$

作用素 Pr^i は射影であるので, 固有空間 \mathcal{W}^i を有する。

$$\mathcal{W}^i := \{w \in l^r \mid \text{Pr}^i w = w\}. \quad (26)$$

また LTI システム $G(z) = (A, B, C, D)$ に対する操作 rrs および ccs を次式で定義する。

$$\text{ccs } G(z) := \begin{bmatrix} G^{(0)}(z^2) & z^{-1}G^{(1)}(z^2) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\text{rrs } G(z) := (\text{ccs } G^T(z))^T. \quad (28)$$

ただし $G^{(i)}(z)$ は以下で定義される。

$$G^{(i)}(z) = \begin{cases} D + C(zI - A^2)^{-1}AB & (\text{if } i = 0) \\ CB + CA(zI - A^2)^{-1}AB & (\text{if } i = 1) \end{cases}. \quad (29)$$

次の補題が成り立つ

補題

任意の因果的かつ 2 周期的な LPTV システム $G \in \mathbf{L}^{n \times m}$ に対し (\mathbf{L} は因果的線形写像の集合), プロパーな有理伝達関数 $G_0^c(z), G_1^c(z), G_0^r(z), G_1^r(z) \in \mathbf{RL}^{n \times m}$ が存在し, つぎの等式を満たす。

$$G = G_0^c(z)\text{Pr}^0 + G_1^c(z)\text{Pr}^1 \quad (30)$$

$$= \text{Pr}^0 G_1^r(z) + \text{Pr}^1 G_0^r(z). \quad (31)$$

補題

因果的な 2 周期的システム A および B が次式で与えられるものとする。

$$A = A_0^c(z)\text{Pr}^0 + A_1^c(z)\text{Pr}^1, \quad (32)$$

$$B = \text{Pr}^0 B_1^r(z) + \text{Pr}^1 B_0^r(z). \quad (33)$$

このとき, 次の不等式が成り立つ。

$$\|AB\| \leq \left(\|\text{Pr}^0 B_1^r\| \quad \|A_1^c \text{Pr}^1\| \right) \begin{pmatrix} \|A_0^c \text{Pr}^0\| \\ \|\text{Pr}^1 B_0^r\| \end{pmatrix}. \quad (34)$$

この補題を用いた制御器の設計方針を次に与える。

S1. For $i \in [0, 1]$, find $K_a'^*$ such that

$$K_a'^* = \arg \inf_{K_a' \in \mathcal{Q}^p} \|\text{Pr}^i T_a[K_a']\|. \quad (35)$$

S2. For $j = \bar{i}$ where i is given in S1, find Q^* such that

$$Q^* = \arg \inf_{Q \in \mathcal{Q}^p} \|T_b[Q]\text{Pr}^j\|. \quad (36)$$

これらの周期的重みつきモデルマッチング問題は, それぞれ単一の LTI モデルマッチング問題となる [3]. 具体的には, つぎの問題 S1' および S2' を解くことにより, LPTV 制御器 K_a, K_b を設計することができる。

S1'. Find $Q_i^{O*}(z)$ such that

$$Q_i^{O*}(z) = \arg \inf_{Q_i^O \in \mathbf{RH}_\infty} \|T_{ai}^r(z)\|, \quad (37)$$

$$Q_i^O(z) := \begin{bmatrix} Q_i^r(z) \\ Q_i^r(z) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

ここで $T_{ai}^r(z)$ は次式で与えられる。

$$T_{ai}^r(z) := I - \text{ccs } N(z)Q_i^O(z). \quad (39)$$

S2'. Find $Q_j^{I*}(z)$ such that

$$Q_j^{I*}(z) = \arg \inf_{Q_j^I \in \mathbf{RH}_\infty} \|T_{bj}^c(z)\|, \quad (40)$$

$$Q_j^I(z) := \begin{bmatrix} Q_j^c(z) & Q_j^c(z) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

ここで $T_{bj}^c(z)$ は次式で与えられる。

$$T_{bi}^c(z) := T_1(z) - T_2(z)Q_j^I(z)\text{rrs } T_3(z). \quad (42)$$

上記の 2 つの問題は標準的な H_∞ 問題の解法を用いて容易に解が得られる。

参考文献

- [1] T. Hayakawa, H. Ishii, and K. Tsumura. Adaptive quantized control for linear uncertain discrete-time systems. In *The 33rd SICE Symposium on Control Theory*, pages 307–312, November 2004.
- [2] P. Khargonekar, K. Poolla, and A. Tannenbaum. Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-30-11:1088–1096, 1985.
- [3] Y. Tange and K. Tsumura. Periodically weighted model-matching problems by lptv controllers formulated in dual lifted forms. In *Proceedings of the 2004 A. C. C.*, pages 3502–3507, Boston, June, 2004.
- [4] 丹下吉雄, 津村幸治. 双対な周期的重み付きモデルマッチング問題に基づく 2 自由度サーボ系設計法. In 第 33 回制御理論シンポジウム資料, pages 403–406, 2004.