

相区間の分割に伴う記号力学系

福田幸二

新領域創生科学研究科複雑理工学専攻

概要

実験や観測等で得た時系列データを解析するときに、適当に与えた閾値を境にして時系列を記号列に符号化することがしばしば行われる。これは、力学系の観点からは、相空間をいくつかの領域に分割し、それによる記号力学系を考えていることに相当する。現在、相空間を生成的な分割と呼ばれるやり方で分割したときの記号力学系の性質はかなり研究されているが、非生成的な分割についてはほとんど知られていない。本研究では、非生成的な分割の影響を理論的に明らかにしたい。また、その結果を時系列解析に適用する。

1 はじめに

実験や観測等で得た時系列データを解析するときに、適当に与えた閾値を境にして時系列を記号列に符号化することがしばしば行われる。例えば、日本の気象庁では、日中の最高気温が 30°C を超えた日を真夏日と呼び、毎年その日数などを公表している。この 30°C という数字は、力学的な意味付けがあるわけではなく、経験によって決めた値といえる。

これは、力学系の相空間から言えば、相空間をいくつかの領域に分割し、各領域に記号を対応させて、分割に伴う記号力学系を考えていることに相当する。このとき、もとの力学系と分割に伴う記号力学系が位相同型になるとき、その分割を生成的な分割と呼ぶ。生成的な分割のもとでは、記号力学系の性質を調べることで、もとの力学系の情報を得ることができる。したがって、生成的な分割は、力学的な意味付けを伴った分割の方法であると言える。エノン写像系や標準写像系などいくつかの具体的な力学系で生成的な分割が知られており、また多くの力学系で生成的な分割が存在すると考えられている。しかし、与えられた力学系について、生成的な分割を求める一般的な方法は知られていない。

本研究では、観点を変えて、相空間の非生成的な分割に伴う記号力学系の性質を調べたい。これは、概要で述べたような、経験的に決めた閾値による領域分割の持つ意味を明らかにすることでもある。

2 非生成的な分割に伴う記号力学系

簡単な一次元非線形写像であるテント写像

$$x_{i+1} = 1 - 2 \left| x_i - \frac{1}{2} \right| \quad 0 \leq x_i \leq 1$$

を考える。この写像系の生成的な分割は、 $x_i = 1/2$ を境とした分割、

$$\left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

である。閾値の左側の領域を **L**、右側を **R** で表すことにすると、生成的な分割では、**L** と **R** の全ての組み合わせが許される。したがって、記号力学系の複雑さを表す位相的エントロピーは、 $\log 2$ となる。分割位置が $x_i = 1/2$ からずれると、特定の **L** と **R** の組み合わせが禁止され、位相エントロピーは $\log 2$ より小さな値となる。図は、分割の閾値と位相エントロピーの関係を表したものである。グラフは非単調な「悪魔の階段」状の構造を持っている。ここで「悪魔の階段」とは、

- ・ 連続
- ・ 全ての点で傾き 0

の条件を満たすにも関わらず、両端での値が異なるようなグラフを指す。通常は、さらに単調非減少という条件を加える場合が多いが、図 1 のグラフは、非単調な「悪魔の階段」構造をもつグラフであると考えられる。このグラフ自体は先行研究で示されていたが、それが本当に「悪魔の階段」の条件を満たすのかどうかは確かめられていなかった。本研究では、このグラフが「全ての点で傾きが 0」であることを理論的に示した。ただし、

