

揺動散逸原理に基づく時系列データの非線形構造 の解析と超ロバストなモデル化

岡部靖憲 堀田武彦 松浦真也

情報理工学系研究科数理情報学専攻

概要

非平衡統計物理学における揺動散逸定理の数学的構造を抽出し、それを時系列解析における「モデリング」の数理原理として昇華させた（数学の定理である）揺動散逸原理に基づいて、時系列の定常性・異常性・因果性・決定性を検証し、超ロバストな解析技術の開発とその地球科学・治水工学・医学・金融工学への応用をめざす。

1. 目的

地球・社会・人間・生体などにおける多数の多様な要素からなるシステムが、まとまりのある挙動を示し安定して存在するとき、複雑系と呼ばれる。本研究では、地震波・オーロラ・地磁気の地球物理学的時系列、メコン河流域の流出量の時系列、マネーサプライ・為替・株価等の経済的時系列、脳波の医学的時系列の四つの複雑系現象に現れる時系列を扱う。

本研究では、複雑系時系列の解析において適用する理論の前提条件を検証し、「データからモデルへ」の姿勢で、理論から導かれる結論を最初の情報として取り出す。さらにそれを解析することによって、時系列データの背後に潜む複雑系現象の構造を抽出する実験数学的研究を行う。

本研究は四つの柱から成り立つ。一つは理論的な研究として、離散時間の確率過程に付随するイノベーションを構成的に求め、可能な離散モデルの形を決定する。それに基づいて、 KM_2O -ランジュヴァン方程式の揺動過程に対する非線形解析を行い、時系列に対する超ロバストなモデル化の基礎を作る。その理論的な応

用として、信号過程と観測過程よりなる非線形なシステムに対する非線形フィルターを計算する超ロバストなアルゴリズムを求める。

二つは複雑系現象の希少事象の異常発現を複雑系現象の一つの表現である時系列の定常性の破れと定義し、定常性の破れの度合いで異常性を検出する異常性のテスト $Test(ABN)$ を用いることによって、時系列の異常性の兆候をリアルタイムで検出するシステムを開発する。

三つは複雑系現象の数理モデルの構築において、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論に基づく定常性の検証 $Test(S)$ ・決定性の検証 $Test(D)$ ・因果性の検証 $Test(CS)$ を施すことによって、時系列の定常性・決定性・因果性を検証し、複雑系時系列に対する超ロバストなモデル化を行う。

四つはその超ロバストなモデルに基づき、複雑系時系列の将来の挙動を予測する。

2. 方法論

Kalman-Buchy の線形推定問題の研究以後、信号過程と観測過程からなる非線形なシステムに対し、その非線形なシステムを線形近似して得られた拡張 Kalman フィルター等非線形フィルターを計算するアルゴリズムを求める研究が行われている。離散時間の確率過程に付随するイノベーションを構成的に求め、可能な離散モデルの形を決定する。現在、イノベーションを用いて表現された非線形なシステムに対しては、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論を用いることによって、非線形なシステムを線形近似するのではなく、条件付平均で表現された非線形フィルターを観測過程に付随する非線形情報空間の生成系を用いて具体的に計算する方法をと

り、非線形フィルターを計算するアルゴリズムを求めることに成功している。このアルゴリズムを実行する超口バストな計算法を開発する。

統計学には変化点解析という手法があり、地震波のP波とS波の到達時刻を定めるのに用いられてきた。それは、地震波の時系列データを適当に2分割した時間枠で各々ARモデルを当てはめ、それらの局所的に定常なARモデルの赤池情報量が最小となる分割点を求め、地震波のP波とS波の到達時刻を探す研究が行われている。その方法には何故局所的ARモデルを用いるかの必然性はなく、また探したいP波とS波の到達時刻をそれらの前後の時系列データを用いる点は地震の前兆を探す研究には有効ではない。本研究では、時系列の異常性を定常性の破れと捕らえ、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論における非線形情報空間の多項式生成系を用いて、定常性の度合いを調べることによって、時系列の異常性の前兆を捕らえるテストの統計的基準を求め、リアルタイムでそれを実行するソフトを開発する。

離散時間の確率過程の時間発展をイノベーションを用いて統一的に記述するモデルに基づいて、 KM_2O -ランジュヴァン方程式の揺動過程に対する非線形解析を行い、時系列に対する超口バストなモデル化の基礎を作る。さらに、それに基づいて、上記の定常性・異常性・決定性・因果性の解析ソフトを用いて、複雑系時系列に対する超口バストなモデル化を行う。

さらに、その超口バストなモデルに基づき、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論における非線形予測公式と非線形推定公式を用いて、複雑系時系列の将来の挙動を予測する。

3. 研究の学術的な特色・独創的な点及び予想される結果と意義

複雑系現象の数理モデルの構築において、天下一的にモデルを立てるのではなく、与えられた時系列に定常性テスト・異常性テスト・因果性テスト・決定性テストを施すことによって、時系列の定常性・異常性・因果性・決定性を検証し、時系列に対する客観的なモデルを構築し、そのモデルに基づき予測を行う当該研究は、従来の時系列解析にはない新しい方法を与える。本研

究におけるアルゴリズムのシステム化は、これまで困難であった実世界の様々な時系列データの定常性・決定性・因果性等の構造解析、予測・予知、診断、異常検出等が可能となるため、多くの時系列の解析と関連した新しい産業創出の基盤技術となると思われる。また、本研究を発展させることができれば、複雑系現象を数学的に解析する糸口を見いだすことができ、数学が本来持っていた実証科学としての姿を取り戻すことになり、「データからモデルへ」という姿勢で複雑系現象の数理工学的・実験数学的研究を行う新しい分野が開拓される可能性があり、その学術的・社会的意義は大きいと思われる。

4. 国内外の関連する研究の中での当研究の位置づけ

「モデルからデータへ」の姿勢でデータの定性的な性質をモデルの定性的な解析結果から説明する研究は今までに多いが、「データからモデルへ」の姿勢でモデルの定性的な性質をデータから検証することによって、データの奥に潜むモデル等の定性的な性質をい必要条件として導く点が本研究の特徴である。その応用として、複雑系現象の異常性の前兆を捕らえる異常解析は「データからモデルへ」の姿勢を通じて可能なことだと思われる。

5. 今までの研究成果

今まで、非平衡統計物理学における揺動散逸定理の数学的構造を調べ、Alder-Wainwright効果の数学的構造を解明した連続時間のT-正值性を満たす弱定常過程に対する KMO -ランジュヴァン方程式論を建設した。次に、退化した離散時間の弱定常過程に対する KM_2O -ランジュヴァン方程式論を建設し、マサニ・ウイーナの非線形予測問題の研究以後未解決であった強定常過程に対する非線形予測問題とKalmanの線形推定問題の研究以後未解決であった非線形推定問題を解決した。次に、揺動散逸定理を時系列解析の指導原理として昇華させた揺動散逸原理をうち立て、与えられた時系列の弱定常性を検証する定常性テスト、2種類の時系列の間の因果関係の有無を判別する因果性テスト、時系列の時間発展が決定的であるかを検証する

決定性テスト、時系列のカオス性を検証するカオス性テストを提案し、これらのテストを実行する統合化システムを開発した。次に、時系列データの異常性を定常性の破れと定義して、時系列の異常性の兆候を検出する異常性の検出 $Tst(ABN)$ を提唱した。

具体的に述べる。

(1): 非退化な弱定常過程に対する KM_2O -ランジュヴァン方程式論を用いて、多次元の非退化な弱定常過程に対する非線形予測子を求めるアルゴリズムを求めた。さらに、数学的に法則の分かる時系列に定常性テスト・因果性テスト・決定性テストを適用し、その結果を理論的研究にフィードバックして、上記の三つの基準を統計学的に確かなものにした。この結果を麻疹と水疱瘡の疫病データに適用し、どちらのデータも時間発展は決定的であるが、麻疹はカオス的、水疱瘡はカオスではないことをアテネでの国際会議で発表した。これはネイチャーの Sugihara-May の論文で提出された時系列の決定性の判定基準の問題に一つの答えを与えた。

(2): 計量ベクトル空間内の流れに対する KM_2O -ランジュヴァン方程式論を構築し、流れの定常性を揺動散逸定理の形で完全に特徴づける特徴付け定理、定常流の構成定理と延長定理、非負定符号関数の延長定理を示した。

(3): 退化した流れに対する KM_2O -ランジュヴァン方程式論を進展させ、一般の強定常過程に対する非線形予測子を計算するアルゴリズムを求めた。これは、Masani-Wiener 研究以後未解決であった強定常過程の非線形予測問題を解決したものである。

(4): 与えられた時系列に定常テスト・因果テスト・決定テストを施すことによって、時系列の定常性・因果性・決定性・カオス性を検証し、時系列に対する客観的なモデルを構築し、そのモデルに基づき予測を行う非線形解析技術の統合化システムの開発を行った。

(5): 離散時間の確率過程に対する非線形予測問題を解決するのに用いた KM_2O -ランジュヴァン方程式論における非線形情報解析と因果解析を進展させることによって、イノベーションを用いて表現された非線形なシステムに対しては、非線形フィルターを計算するアルゴリズム

を求めることに成功した。これは、二つの確率過程の間の因果解析の研究を進展させ、Kalman の線形推定問題の研究以後未解決であった非線形推定問題を解決したものである。

(6): 時系列データの異常性を定常性の破れと定義して、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論に基づく時系列データの定常性の検証 $Test(S)$ と離散時間の確率過程の非線形情報空間に付随する多項式型の生成系を用いて、時系列データの異常性の兆候を検出する異常性の検出 $Tst(ABN)$ を提唱した。特に、経済現象における株価の異常性を示す恐慌（ブラックマンディ・アジア危機・IT バブル）に適用して、 $Test(ABN)$ が有効であることを実証した論文を発表した。

6. 今年度の研究成果

計量ベクトル空間内の退化した一般の流れに付随する対する KM_2O -ランジュヴァン行列系をすべて求めるアルゴリズムを確立した。

連続時間の弱定常過程の大域的な時間発展を記述する KMO -ランジュヴァン方程式より局所的な時間発展を記述する KM_2O -ランジュヴァン方程式を導いた。

ロジスティック・テント写像より導かれる強定常過程のカオス性の特徴である「秩序と混沌の共存」を定量的に捉える定理を証明した。

多項式型の生成系を用いた 1 次元の時系列に対する $Test(ABN)$ を 3 次元の時系列である地震波の時系列に適用できるように改良し、地震の P 波と S 波の初期位相を捕まえることができ、地震学の専門誌に投稿した。

最近日本では、深部低周波地震の S 波がきてからの低周波域の構造が通常地震波の構造とは異なる点から、多くの地震学者・火山学者が興味をもち、精力的な研究が行われている。 KM_2O -ランジュヴァン方程式論における多項式型の生成系を用いた定常解析と決定解析を通常地震波の時系列データと深部低周波地震波の時系列に時系列の決定性を検出する $Test(D)$ によって、「低周波」の特徴の一端を捉える「分離性」を発見した。それは奇数次の多項式の非線形変換を施した時系列から元の時系列への因果値がどれもがどの偶数次の多項式の非線形変換を施した時系列から元の時系列への因果値よ

りも大きい性質である. この性質を地震学的観点から東京大学地震研究所の武尾教授と調べた共同研究を地震学の専門誌に投稿した

この「分離性」はオーロラ・磁気嵐・皮質脳波の時系列も持つことが実験によって確かめつつあり, 電磁波と関連する他の時系列に対する実証分析を徹底的に行う必要があり, 来年度に行う.

7. 文献

[1] Masaya Matsuura and Yasunori Okabe, On the theory of KM_2O -Langevin equations for non-stationary and degenerate flows, *J. Math. Soc. Japan*, Vol.55, No.2, pp.1-41(2003).

[2] Yasunori Okabe, Masaya Matsuura and Maciej Klimek, On a method for detecting certain signs of stock market crashes by non-linear stationarity tests, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.3, No.4, pp.443-484(2002).

[3] Maciej Klimek, E. Karlson, Masaya Matsuura and Yasunori Okabe, A geometric proof of the fluctuation-dissipation theorem for the KM_2O -Langevin equations, *Hokkaido Math. J.*, Vol.31, No.3, pp.615-628(2002).

[4] 岡部靖憲, 時系列解析における揺動散逸原理と実験数学, 日本評論社, p.362, 東京 (2002).

[5] 岡部靖憲, 確率・統計, 朝倉書店, p.273, 東京 (2002).

[6] Masaya Matsuura and Yasunori Okabe, On a non-linear prediction problem for one-dimensional stochastic processes, *Japanese J. Math.*, Vol.27, No.1, pp.51-112(2001).

[7] Yasunori Okabe and Akihito Kaneko, On a non-linear prediction problem for multi-dimensional stochastic processes with its applications to data analysis, *Hokkaido Math. J.*, Vol.29, No.3, pp.601-657(2000).

[8] Yasunori Okabe and Masaya Matsuura, On the theory of KM_2O -Langevin equations for stationary flows (3): extension theorem, *Hokkaido Math. J.*, Vol. 29, No.2, pp.369-382(2000).

[9] Yasunori Okabe, On the theory of KM_2O -Langevin equations for stationary flows (2): construction theorem, *Acta Applicandae Mathematicae*, Vol.63, pp.307-322(2000).

[10] Yasunori Okabe, On the theory of KM_2O -Langevin equations for stationary flows (1): characterization theorem, *J. Math. Soc. Japan*, Vol.51, No.4, pp.817-841(1999).

[11] Yasunori Okabe and Takashi Yamane, The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (III): Deterministic analysis, *Nagoya Math. J.*, Vol.152, pp.175-201(1998).

[12] Yasunori Okabe and Takashi Ootsuka, Application of the theory of KM_2O -Langevin equations to the non-linear prediction problem for the one-dimensional strictly stationary time series, *J. Math. Soc. Japan*, Vol.47, No.2, pp.349-367(1995).

[13] Yasunori Okabe and Akihiko Inoue, The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (II): Causal analysis (1), *Nagoya Math. J.*, Vol.134, pp.1-28(1994).

[14] Yasunori Okabe, Langevin equations and causal analysis, *Amer. Math. Soc. Transl.*, Vol.161, pp.19-50(1994).

[15] Yasunori Okabe and Yuji Nakano, The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (I): Stationary analysis, *Hokkaido Math. J.*, Vol.20, No.1, pp.45-90(1991).

[16] Yasunori Okabe, On a stochastic difference equation for the multi-dimensional weakly stationary process with discrete time, “*Algebraic Analysis*” in celebration of Professor M. Sato’s sixtieth birthday, *Prospect of Algebraic Analysis* (ed. by M. Kashiwara and T. Kawai), Volume II, Academic Press, pp.601-645(1988).