実世界情報システムプロジェクト
〜バーチャルリアリティ研究グループ〜

遠隔制御を実現する基礎理論の構築

津村 幸治　原 辰次

情報理工学系研究科システム情報学専攻

1　研究の概要

仮想現実を実現するシステムでは，サブシステムとなるマニピュレーターや人が物理的に遠隔地に配されており，互いが発する信号を，計算機ネットワーク等を用いて送受信する．ここで個々のサブシステムが動的システムであるとき，オンラインで高性能な動作をするには，信号の伝送系が高容量であることが望まれる．しかし現実には，常に条件の整った環境化で仮想現実システムが運用されるわけではなく，むしろ信号伝達の容量に制限のあるシステムを想定し，システムの設計をする必要がある．

本研究では仮想現実システムに不可欠な遠隔制御システムにおいて，信号の伝送系の容量とシステムの性能の関係に焦点をあて，研究のサブテーマを 2 つ設定し，それぞれの解決を試みる．

2　情報量に制限のある制御システムの安定化

2.1　これまでの経緯

前年度に引き続き，本テーマに関する研究の進展を報告する．

本研究では，制御対象と制御器が通信容量に制限のある通信線で結合されている場合における，閉ループ系の安定化問題を考える．制御系の中を流れる信号の情報量は，符号化を施し，符合の単位時間あたりの平均符号長をもって計る．より具体的には下に表される制御対象 P，制御器 C，量子化器 Q_r，符号器 E_r，復号器 D_r からなる制御系 G を考える．

$$P(z) := \frac{n(z)}{d(z)},\ \ n(z),\, d(z) \in \mathcal{RH}_\infty \tag{1}$$

$$\begin{aligned} G: \quad & y = Pu + e,\ \tilde{y} = D_r E_r Q_r y \\ & u = C\tilde{y} \end{aligned} \tag{2}$$

制御対象 P は SISO 離散時間線形時不変システムとする．その出力にノイズ e が付加された信号が，量子化幅が Δy で一定のメモリレス一様量子化器 Q_r を通して離散値に変換され，次に符号器 E_r によって符号に変換される．符号を受け取る復号器 D_r がそれを復号し制御器に入力する．ここでは簡単のため，制御器の出力は，直接制御対象にフィードバックされるものとする．

その上で次の制約付き安定化問題を考える．

問題: 「制御系 (2) において，与えられた正数 K に対して

$$\mathrm{E}[l_r] \le K \tag{3}$$

を満足する，安定化有限次元線形制御器 C，符号器 E_r，復号器 D_r を求めよ．ここに l_r は符号器 E_r の出力の符号長とする.」

近年，有限の通信容量を含む制御系の安定化が幾つか報告されている [8, 1, 4] が，外生信号により定常的に励起される系にして，周波数領域の性質を用いた結果は未報告である．以下では周波数領域のアプローチによって本問題を解決することを考える．

まず制御系 G に準ずる制御系 G' を次に定義する．

$$\begin{aligned} y' &= Pu' + e, \\ u' &= Cy'. \end{aligned} \tag{4}$$

次が成り立つ．

補題 [7]: 「量子化幅 Δy に応じて計算される正数 ϵ が存在し，

$$|H(Q_r y) - \tilde{H}(y')| \le \epsilon \tag{5}$$

が成り立つ．ただし $H(\cdot)$ は信号のエントロピー，$\tilde{H}(\cdot)$ は近似エントロピーである (詳細は文献 [7] 参照).」前年度において，次の定理が成り立つことを示した．

定理 [7]: 「$P(0) = 0$ とする．また (5) を仮定する．次の命題が成り立つ．もし

$$L + \epsilon \le K \tag{6}$$

が成り立つならば，(3) を満たす安定化制御器 C が存在する．反対にもし

$$K < L - \epsilon, \tag{7}$$

ならば，$C \in \mathcal{S}_{G'}$ でかつ (3) を満足する安定化制御器 C は存在しない．ただし

$$\begin{aligned} L &:= H_o - \log_2 \Delta y, & (8)\\ H_o &:= \sum_j \log_2 |\beta_j| \\ &\quad + \sum_{i \in I} \log_2 \min\{|\sigma_i|, |\sigma_{i+1}|\}, & (9) \end{aligned}$$

β_j は P の不安定極，$\sigma_1 \le \sigma_2 \le \cdots \le \sigma_M$ は P の不安定実零点，

$$I := \{i : \operatorname{sgn} d(\sigma_i) \cdot \operatorname{sgn} d(\sigma_{i+1}) = -1\} \tag{10}$$

とする.」

本結果の意味するところは次である．

1) 制約付き安定化問題の可解性が，制御対象の不安定極，不安定零点を用いて判定できる．

2) 制御対象の不安定極，不安定零点の数，大きさに応じて，安定化に必要最小限の情報量が増大する．

」

以上が前年度得られた結果である．

2.2 エントロピーの漸近特性

前年度に示した主結果では，安定化制御器が存在するための必要条件と十分条件の間に，条件 (5) に由来する ϵ の本質的なギャップが存在した．ところが制御系 G，G' の構造から，量子化が十分精細となる $\Delta y \to 0$ の状況において，本条件は任意の小さな ϵ において成り立つのではないかと予想される．本年度に示した結果の一つは，この予想が正しいことである．次の定理を得る．

定理: 「任意の正数 ϵ に対して Δy_ϵ が存在し，$\Delta y \le \Delta y_\epsilon$ のとき，

$$|H(Q_r y) - \tilde{H}(y')| \le \epsilon \tag{11}$$

が成り立つ.」

本結果を用いることにより，前年度示した主結果における必要条件と十分条件の間のギャップが，$\Delta y \to 0$ という漸近的状況において任意に埋めることが可能であることが示された．

3 周期制御システムの性能評価

3.1 概要

周期時変制御器は，高性能が期待できる時変制御器のクラスの一つであり，かつ容易に実装できるシステムである．また注目すべき特徴は，周期的な信号を取り扱うため，制御器と制御対象との間で交わす信号の情報量を，周期的でない制御系に比べ格段に軽減することが可能となる点である．ここでは，そのような特徴を有する，周期時変制御器の性能を解析することをめざす．

3.2 背景

周期時変制御器は時不変制御器に比べ，いくつかの利点を有していることが知られている．例えば閉ループ系の零点配置の改善 [2]，ゲイン余裕の改善 [3] 等である．しかし，その利点をより明確にするためには，感度関数のゲインの軽減といった，一般性があり，かつ分かりやすい指標で比較されることが望まれる．一方，p–ノルムでシステムゲインを評価する限り，時不変制御器で達成できる制御性能を，時変制御器は越えられないとい

う否定的な結果が知られている [5, 9]．このことは，システムゲインの通常の p–ノルムが，周期時変制御器の性能を評価するのに適切ではないことを示している．

3.3　目的と問題設定

ここでの目的は，周期時変制御器の利点を，より一般的な形式で明らかにすることである．本研究ではそれに適した評価基準を与えることから始める．一般性のある評価を得るため本研究では，

1) 閉ループの作用素をモデルマッチング形式で記述する．

2) 1) で得られた作用素のゲインを定義する．

の過程をとる．

モデルマッチング形式とは閉ループ系の伝達特性を，

$$T_1 - T_2 Q T_3$$

という形式で表現することである．ここで T_i は制御対象の特性から決定する作用素，Q は安定化補償器の自由パラメタである．

一方 2) の点について本研究では，周期的に入力，観測する入出力信号間のゲインに着目する．このことは周期的に入力信号を受け付ける，もしくは周期的に出力を観測する作用素 $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$ を用いて，

$$\|\mathcal{I}(T_1 - T_2 Q T_3)\| \tag{12}$$

$$\|\mathcal{O}(T_1 - T_2 Q T_3)\| \tag{13}$$

とすることに対応する．

時変システムの一つのカテゴリである周期時変制御系において，以上のモデルマッチング形式を得るのは容易ではない．本研究では，次に示す「双対リフティング形式」という表現を考え，これを用いることにより，そのようなシステム表現が可能となることを示した．

3.4　双対リフティング形式

ある線形時不変システムの伝達関数を $G(z)$ とする．このとき，

$$G(z) = \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} G^{(i)}(z^N)$$

とする分解が一意に定まる．ただし $G^{(i)}(z)$ は次で定義される．

$$G^{(i)}(z) = \begin{cases} D + C(zI - A^N)^{-1} A^{N-1} B \\ (i = 0) \\ CA^{i-1}B + CA^i (zI - A^N)^{-1} A^{N-1} B \\ (1 \le i \le N-1) \end{cases}$$

次に $G(z)$，$G^{(i)}(z)$ に対して，次の 2 つの操作を定義する．

$$\mathrm{cs}\ G(z) := \begin{pmatrix} G^{(0)}(z) \\ \vdots \\ G^{(N-1)}(z) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rs}\ G(z) := \begin{pmatrix} G^{(N-1)}(z) & \cdots & G^{(0)}(z) \end{pmatrix}$$

次が成り立つ．

定理 [6]: 「N 周期システム G について，$\tilde{G} = WGW^{-1}$ は次の 2 つの表現形式を持つ．

$$\tilde{G}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{q}^0 \mathrm{cs}\ G_0(z) & \cdots & \tilde{q}^{-N+1} \mathrm{cs}\ G_{N-1}(z) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{G}(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{rs}\ G_{N-1}(z) \tilde{q}^{-N+1} \\ \vdots \\ \mathrm{rs}\ G_0(z) \tilde{q}^0 \end{pmatrix}$$

ここで作用素 W は一般に信号

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \end{pmatrix}$$

について

$$W\alpha = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_N & \cdots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_{N+1} & \cdots \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \alpha_{N-1} & \alpha_{2N-1} & \cdots \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

を導出するリフティング，$\tilde{q}$ は，時間進み作用素 q と W を用いて

$$\tilde{q}^\tau := W q^\tau W^{-1}$$

と定義される.」

本定理の 2 つの表現形式を，双対リフティング形式と呼ぶ．これらの形式を同時に用いることにより，周期制御器を含む閉ループ系の伝達特性を，前章で示したモデルマッチング形式で表現することが可能となる．

3.5 制御系設計問題と結果

前章で示したリフティング形式を用いることにより，(12)，(13) 式が，ある時不変系のモデルマッチング問題に帰着させせることが可能となる．

定理 [6]:「

$$\mathcal{I}(T_1 - T_2QT_3) = (\tilde{T}_1(z) - \tilde{T}_2(z)\tilde{Q}(z)\tilde{T}_3(z))P_I \tag{14}$$

$$\mathcal{O}(T_1 - T_2QT_3) = P_O(\hat{T}_1(z) - \hat{T}_2(z)\hat{Q}(z)\hat{T}_3(z)) \tag{15}$$

ここに P_I, P_O はそれぞれ入力，出力を間引く作用素である.」

以上より，周期時変制御器を組み入れた閉ループ系のシステムゲインの最小化問題を，時不変系のモデルマッチング形式で表現された伝達関数のゲインの最小化問題に帰着することができた．このことは既存の制御系設計手法を用いて，容易に周期時変制御器が導出できることを意味する．

本研究では以上の結果を用いて，周期時変制御器を設計し，その制御性能について解析した．解析の結果，(14), (15) の評価において，時不変制御器を越える性能が達成されることがわかった [6]. このことは，これまで部分的に知られていた周期時変制御器の性能の高さを，より一般的な指標のもとで明らかにしたことになる．

4 まとめ

本年度は，仮想現実システムに不可欠な遠隔制御システムにおいて 2 つのテーマに焦点をあて，それぞれ結果を導出した．テーマの一つは伝送容量の制限下における安定化問題であり，前年度課題となっていた，安定化のための必要条件と十分条件の間のギャップについてである．信号の量子化の高精細化という漸近的状況下において，本ギャップを埋めることが可能であることを示し，システムのある種のエントロピーが，本問題において本質的であることが示された．一方，時変制御器の一つのクラスである周期時変制御系に着目し，その表現を考察することにより，これまで部分的に知られていた利点について，明確に示すことに成功した．

参考文献

[1] N. Elia and S. K. Mitter. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-46-9:1384–1400, 2001.

[2] B. Francis and T. Georgiou. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-33-9:820–832, 1988.

[3] P. Khargonekar, K. Poolla, and A. Tannenbaum. Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-30-11:1088–1096, 1985.

[4] G. N. Nair and R. J. Evans. Mean square stabilisability of stochastic linear systems with data rate constraints. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1632–1637, 2002.

[5] K. Poolla and T. Ting. Nonlinear time-varying controllers for robust stabilization. *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-32-3:195–200, 1987.

[6] Y. Tange and K. Tsumura. Periodically weighted model-matching problems with LPTV controllers formulated in dual lifted forms. *Technical Report of The Univ. Tokyo*, METR200-46:, 2003.

[7] K. Tsumura and J. Maciejowski. Stabilizability of SISO control systems under constraints of channel capacities. In *Proceedings of the 42th Conference on Decision and Control*, pages 193–198, Maui, USA, 2003.

[8] W. S. Wong and R. W. Brockett. Systems with finite communication bandwidth constraints – II: Stabilization with limited information feedback. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-44-5:1049–1053, 1999.

[9] C. Zhang and J. Zhang. Performance of discrete periodic control for lp disturbance rejection. In *Proceedings of the 35th CDC*, pages 2265–2270, 1996.