3.2　物理・情報デュアル制御

原 辰次 *，津村 幸治 *，大石 泰章 †

*：情報理工学系研究科 システム情報学専攻

†：情報理工学系研究科 数理情報学専攻

1　有限周波数特性の線形行列不等式特徴付け

原 辰次（システム情報学専攻）

1.1　概要

KYP (Kalman–Yakubovič–Popov) 補題は，最適制御，ロバスト制御，適応制御などシステム制御理論の展開において非常に大きな役割を果たしてきた．本研究では，KYP 補題を一般化し，線形時不変系に対する有限周波数特性を統一した形式で特徴付けている． 具体的には,「連続時間系/離散時間系」に対して,「低周波数帯域/中間周波数帯域/高周波数帯域」における「正実性/有界実性などの周波数特性条件」の必要十分条件を統一的な線形行列不等式 (LMI) で与えている．これらは，通常の正実性/有界実性などの必要十分条件を与えている KYP 補題をその特別の場合として含むものである．

なお，本研究はヴァージニア大学の岩崎徹也助教授との共同研究である．

1.2　有限周波数特性

その伝達関数が $G(\lambda) := C(\lambda I - A)^{-1}B + D$ で与えられる線形時不変系に対して，行列不等式条件：$\forall\lambda \in \Lambda$,

$$\begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (\lambda I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1}$$

で表現される周波数特性を考える．ここで，Θ を適切に選ぶことにより，小ゲイン/高ゲイン特性や位相特性を表すことができる．例えば，Θ を

$$\Theta = \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

のように決めると，(1) の条件は

$$\begin{bmatrix} G(\lambda) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} G(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \leq 0$$

のように書き換えられる．したがって，小ゲイン条件は

$$\sigma_{\max}[G(\lambda)] \leq \gamma : \quad \Pi = \Pi_{sg} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

と書ける．同様に，高ゲイン条件は

$$\sigma_{\min}[G(\lambda)] \geq \gamma : \quad \Pi = \Pi_{hg} := \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

となり，正実性条件は

$$G(\lambda)^* + G(\lambda) \geq 0 : \quad \Pi = \Pi_{pr} := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

で表せる．

また，Λ を以下のように選ぶことにより,「連続時間系/離散時間系」に対した「低周波数帯域/中間周波数帯域/高周波数帯域」における特性と規定することになる．

- **連続時間系，低周波数帯域：**

$$\Lambda_{c\ell} := \{ \ j\omega \mid \omega \in \mathcal{R}, \ |\omega| \leq \varpi_\ell \ \}$$

- **連続時間系，中間周波数帯域：**

$$\Lambda_{cm} := \{ \ j\omega \mid \omega \in \mathcal{R}, \ \varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2 \ \}$$

- **連続時間系，高周波数帯域：**

$$\Lambda_{ch} := \{ \ j\omega \mid \omega \in \mathcal{R}, \ |\omega| \geq \varpi_h \ \}$$

- **離散時間系，低周波数帯域：**

$$\Lambda_{d\ell} := \{ \ e^{j\theta} \mid \theta \in \mathcal{R}, \ |\theta| \leq \vartheta_e ll \ \}$$

- **離散時間系，中間周波数帯域：**

$$\Lambda_{dm} := \{\ e^{j\theta}\ |\ \theta \in \mathcal{R},\ \vartheta_1 \le \theta \le \vartheta_2\ \}$$

- **離散時間系，高間周波数帯域：**

$$\Lambda_{dh} := \{\ e^{j\theta}\ |\ \theta \in \mathcal{R},\ \vartheta \le |\theta| \le \pi\ \}$$

1.3 線形行列不等式特徴付け

有限周波数特性 (1) の条件は一般的に，$\lambda \in \Lambda$ を含まない行列不等式で書き直すことができる．その結果に基づいて，「連続時間系/離散時間系」に対する「低周波数帯域/中間周波数帯域/高周波数帯域」の特性を線形行列不等式で特徴付けが可能となる．以下の定理がその結果である．

定理： 実行列 A, B と実対象行列 Θ が与えられているとする．ただし，(A, B) は可制御対で，A は連続時間系の場合には虚軸上，離散時間系の場合は単位円周上に固有値を持たないと仮定する．このとき，(1) の不等式で表される周波数特性がすべての $\lambda \in \Lambda_{ij}$ ：

$$i = \begin{cases} c & : \quad \text{連続時間系} \\ d & : \quad \text{離散時間系} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} \ell & : \quad \text{低周波数帯域} \\ m & : \quad \text{中間周波数帯域} \\ h & : \quad \text{高周波数帯域} \end{cases},$$

で成立するための必要十分条件は，以下の行列不等式を満たすエルミート行列 P と $Q \ge 0$ が存在することである．

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} L_{ij}(P,Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta \le 0 \quad (2)$$

ここで，

$$L_{c\ell}(P,Q) := \begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \varpi_\ell^2 Q \end{bmatrix},$$

$$L_{cm}(P,Q) := \begin{bmatrix} -Q & P + j\varpi_c Q \\ P - j\varpi_c Q & -\varpi_1\varpi_2 Q \end{bmatrix},$$

ただし，$\varpi_c := (\varpi_1 + \varpi_2)/2$

$$L_{ch}(P,Q) := \begin{bmatrix} Q & P \\ P & -\varpi_h^2 Q \end{bmatrix},$$

$$L_{d\ell}(P,Q) := \begin{bmatrix} -P & Q \\ Q & P - 2\cos\vartheta_\ell\, Q \end{bmatrix},$$

$$L_{dm}(P,Q) := \begin{bmatrix} -P & e^{j\vartheta_c} Q \\ e^{-j\vartheta_c} Q & P - 2\cos\vartheta\, Q \end{bmatrix},$$

$$\text{ただし,}\vartheta_c := \frac{\vartheta_2 + \vartheta_1}{2}, \quad \vartheta := \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}.$$

$$L_{dh}(P,Q) := \begin{bmatrix} P & -Q \\ -Q & 2\cos\vartheta_h\, Q - P \end{bmatrix}.$$

1.4 まとめと今後の展開

本研究では，KYP 補題を拡張し有限周波数特性の統一的な線形行列不等式条件を求めた．この結果は，複素平面上の任意の 2 次曲線の内部あるいは外部を領域とする特性まで拡張可能であり，現在詳細について検討中である．また，これらの工学への応用（ロバスト制御系設計，ディジタルフィルタ設計，制御対象と制御器の統合化設計など）についての検討も開始している．

2 量子化データを用いたシステム同定

津村 幸治（システム情報学専攻）

2.1 背景と目的

古典的な制御工学の制御対象は構造が比較的簡単なものであり，不確かさの小さいものであることが多い．そこでは制御対象と制御器はある意味で十分密に結合しており，その間で交わされる信号の質が問題となることは少なく，制御器の導出そのものが議論される．一方近年，制御器に対する要求は増大し，制御対象が複雑／大規模で，かつ不確かさが大であるといった状況を扱うことが多い．この時，制御器は制御対象に関する信号を効率的に利用し，かつ制御対象を的確にコントロールする必要がある．つまり制御対象と制御器との間で交換する信号の質が，制御器を稼動させる上で考慮すべき重要な項目となる．

以上を背景に本研究では，制御系の動作に必要な，制御対象に関する情報量，および制御対象に与える指令信号の複雑度を，制御系を流れる信号の情報量を解析することにより厳密に求めることを最終目標としている．このように，制御系に流れる信号の情報量に着目した制御問題を考えることは，単に高度な制御器の導出のためのみならず，

フィードバック構造を有する制御系の本質を情報量という視点で捉えなおし，これまで知られてきた多くの制御理論の結果を，統一的に説明するポテンシャルを有していると期待できる．

制御系が適応動作をする場合，制御器の構造は大きく分けて，制御対象をその入出力信号から推定する機構と，推定された対象を安定化する機構の2つからなる．本研究では前者の過程を純粋にシステム同定の問題として切り出し，制御対象の推定に必要な情報量を求める問題を考える．信号の量子化の影響を，より直感的でわかりやすい形で導出するため，問題設定は最も単純で，かつある特殊な条件下を想定する．その上で，システムパラメタの推定誤差の仕様を満たす，最も荒い最適量子化器を導出し，その性質を解析した．なおシステム同定の分野で量子化の問題に触れているものとして [2] がある．そこでは量子化誤差を単純にノイズとして扱う場合の影響について説明されている．

2.2　問題設定と主結果

対象の系は，SISO の離散時間 MA モデルの出力が，メモリレスの量子化器を通して観測されるとする．入力信号列は連続値をとり既知，かつあるクラスに属するランダムな確率変数の実現としている．適用する同定手法は一般的な最小 2 乗法とする．本研究の目的は，量子化された入出力データを用いたシステムパラメタの推定問題において，与えられた量子化数の上界を満足し，量子化誤差の分散の最小値を達成する最適量子化器を導出することである．以下の結果を得た．

1: 最適な量子化器の各量子化幅，および達成される最小の分散値が，明確に定義されるある有理関数の最小化問題を，再帰的に解くことにより得られる．

2: 最適量子化器は，入力信号の原点において粗く，信号の定義域の上下限に近づくにつれて精細になるという特徴を持つ．

3: 達成される最小の分散値の近似値の幾つかが得られる．

4: 推定パラメタに含まれる量子化誤差による影響は，漸近的に $M^{-1}N^{-1/2}$ のオーダーの多項式で近似できる．ここに M は量子化数，N は推定に用いる入出力データ列長である．

5: このシステム同定に必要な総情報量は，入出力データ列長と量子化数から計算できるが，総情報量を一定としたとき，量子化誤差の影響を軽減するには，量子化の精細化が，入出力データ列長の増大より効果的である．一方，ノイズ誤差の軽減には入出力データ列長の増大が効果的であり，両者の誤差項の間にトレードオフが存在する．

2.3　考察とまとめ

近年，量子化された信号を用いた安定化問題が活発に議論されているが，特に Elia & Mitter の結果 [1] は興味深い．それによると，ある種の漸近安定性を満足する最適量子化器（最も粗い量子化）は，量子化される信号の原点で精細で，原点から離れるに従い粗くなるという特徴を持つ．本研究の結果はそれとは反対のものであり，安定化と推定のある種の双対性を示している．適応形制御システムは，基本的にシステムの推定部と安定化器の2つのサブシステムから構成されると考えられるが，そのシステムで達成可能な制御性能には，交わされる信号の情報量の制約に基づく限界が存在することが想像される．本問題は今後の課題としたい．

3　ロバスト制御のための同定法

大石 泰章（数理情報学専攻）

3.1　背景と目的

ロバスト制御では制御対象がダイナミクスの集合で表現されていると考え、その集合のすべての要素に対して一定以上の性能を保証する制御器を設計する．したがってロバスト制御を適用するためには，与えられた対象をダイナミクスの集合で表現する必要があり，そのための方法がモデル集合同定，最悪ケース同定，セットメンバーシップ同定などの名前で研究されている．

従来のモデル集合同定法の多くは確定的方法であり，概略次のような方法であった．すなわち，同定対象は線形であり雑音の上界が既知であるなどの仮定をおき，この仮定を満たすダイナミクスの中で観測された入出力データと矛盾しないすべ

てのものの集合を考え，これをもって同定結果とする．この方法の問題点は実際の同定対象がこのような強い仮定を満たすかどうか疑問であるということである．仮定が満たされない場合，得られる同定結果の妥当性も疑わしくなってしまうので，対象や雑音に対してもっと弱い仮定のもとで適用できるような同定法が望まれる．

本研究では，モデル集合同定を確率的枠組で定式化することにより，対象の線形性等の仮定を必要としないモデル集合同定法を構築した．詳細は文献 [4] で発表している．

3.2 結果

同定対象は離散時間時不変で因果的な 1 入力 1 出力系であるとし，その入力を u_k, 出力を y_k と書く．出力 y_k は後で用いる補助的な信号 $\overline{y}_k$ とともに未知の条件つき確率分布 $P_{(y_k,\overline{y}_k)|u_{k-1},u_{k-2},\ldots}$ に従うとする．また，入力 u_k はある $[-\mu,\mu]$ 中の確率分布に従って独立同分布で生成するものとする．

本研究における重要な仮定は次の通りである．すなわち，任意の k に対して確率 1 で $|y_k-\overline{y}_k|\le c$ が成り立ち，$|k-k'|\ge K$ ならば $\overline{y}_k$ は $\overline{y}_{k'}$ と $u_{k'}$ から統計的に独立であるとする．信号 $\overline{y}_k$ の値は未知でよいが，値 c と K は既知であるものとする．同定対象となるダイナミクスの多くは，過去の入出力の影響が指数関数的に減衰するようなものなので，このような仮定を満たすことは多いと考えられる．

提案する同定法は，同定対象のダイナミクスを FIR モデル $\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}=[u_{k-1}\ \ldots\ u_{k-d}][h_1\ \ldots\ h_d]^{\mathrm{T}}$ で近似し（これを公称モデルと呼ぶ），近似誤差の上界を与えるようなものである．入出力データとして $u_1,u_2,\ldots,u_N;y_1,y_2,\ldots,y_N$ が与えられているものとし，その中から $n:=\lfloor N/K\rfloor$ 個の組 $\{(y_{(j)},\boldsymbol{x}_{(j)})\}_{j=1}^n$ を抽出しておく．ただし，$y_{(j)}:=y_{jK}$，$\boldsymbol{x}_{(j)}:=\boldsymbol{x}_{jK}=[u_{jK-1}\ \ \ldots\ \ u_{jK-d}]^{\mathrm{T}}$ である．

同定法.

1. 条件 $|y_{(j)}-\boldsymbol{x}_{(j)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}|\le b$, $j=1,\ldots,n$ の下で b を最小化するような $(\boldsymbol{h},b)$ の組を求め，これを $(\boldsymbol{h}^*,b^*)$ と書く．
2. $i=1,\ldots,d$ のそれぞれについて，条件 $|y_{(j)}-\boldsymbol{x}_{(j)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}|\le b^*+2c$, $j=1,\ldots,n$ の下で $|h_i-h_i^*|$ を最大化するような $\boldsymbol{h}$ を求め，最大値を e_i と書く．
3. 公称モデルとして $y_k=\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}^*$ を与え，近似誤差の上界として $b^*+2c+\mu\sum_{i=1}^d e_i$ を与える． □

この同定法の性能を評価するため，時刻 $k_0\ge N+K$ に新しい入出力対 $(y_{k_0},\boldsymbol{x}_{k_0})$ を観測し，公称モデルの出力 $\boldsymbol{x}_{k_0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}^*$ が実際の出力 y_{k_0} をどのくらい正確に予測するかを考えることにする．

定理． $1-(d+1)/(n+1)$ 以上の確率で不等式 $|y_{k_0}-\boldsymbol{x}_{k_0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}^*|\le b^*+2c+\mu\sum_{i=1}^d e_i$ が成立する．ここで確率は入出力データ $\{(y_k,\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^N$ および新しく観測した入出力対 $(y_{k_0},\boldsymbol{x}_{k_0})$ に関して測るものとする． □

ここで，この定理の与える性能評価は有限の n に関して成立するということ，そしてこの定理は対象と雑音の確率的性質に依らずに成立し，その意味で最悪ケースを考えているということが大切である．

参考文献

[1] N. Elia and S. K. Mitter: Stabilization of linear systems with limited information, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-46** (2001), 1384–1400.

[2] M. Gevers and G. Li: *Parametrization in Control, Estimation and Filtering Problems: Accuracy Aspects*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[3] T. Iwasaki, S. Hara, and H. Yamauchi: Dynamical system design from a control perspective: Finite frequency positive-realness approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, to appear.

[4] Y. Oishi: Distribution-free approach to probabilistic model-set identification, in: *Control and Modeling of Complex Systems: Cybernetics in the 21st Century* (K. Hashimoto, Y. Oishi, and Y. Yamamoto, eds.), Birkhäuser, Boston, 2003, 105–117.