1.4 超ロバスト幾何計算

杉原厚吉，西田徹志

情報理工学系研究科数理情報学専攻

1　はじめに

幾何計算は誤差に対して脆弱である．通常の数値計算では，誤差が小さいと結果は真の解に近く，誤差が大きくなるにつれて真の解からのずれが大きくなる．その意味で，誤差の大きさと解の質との間には連続的な関係がある．

しかし，幾何計算の世界では事情が異なる．誤差が小さくても，位相構造の判定を誤るとユークリッド幾何学の世界では生じるはずのない状況に陥り，計算は行き詰まる．その結果，計算が無限ループに陥ったり，異常終了したりして，ソフトウエアが暴走してしまう．

したがって，幾何アルゴリズムを，誤差の生じる計算環境でも安定して動作するものに作り変えることが，アルゴリズムの実用化のための重要な課題である．本サブプロジェクトは，そのような幾何アルゴリズムの安定化のための汎用的方法論としてのロバスト幾何計算技術を確立することを目標に掲げて出発した．

本年度は，私達が今までに開発してきたロバスト幾何計算技術を汎用的方法論にまとめるための研究計画を立てるとともに，それを目指した個別の幾何計算場面でのロバストアルゴリズムを開発した．以下にそれらをまとめる．

2　研究計画

私達が今までに開発してきた次の五つのロバスト幾何計算法をさらに発展させて，汎用技術にまとめるために次のような計画を立てた．

(1) 位相優先法

計算対象の幾何構造の位相的性質の一貫性を，数値計算結果より優先させることにより，矛盾の発生を防ぐ幾何アルゴリズム設計法を私達は世界に先駆けて提案し，それを多くの実用的な問題に適用してその有効性を確認してきている．このアルゴリズム設計法は，位相優先法と呼ばれて，次第に産業現場にも浸透しつつある．本研究では，この設計法を，ソフトウエア技術者が経験によって習得する経験的技術から，学習で習得できる理論体系へ質的に進化させる．そのために，対象の位相的性質を効果的・汎用的に記述することのできる離散数学・離散最適化分野との融合を図り，幾何計算問題の分類と，それに利用できる位相的性質を体系的にまとめることによって，利用者のためのマニュアルを作る．

(2) 整数帰着法

幾何計算の中で計算の骨格を決定するのは，対象の位相構造の判定である．有限精度の計算では，一般には厳密に正しい計算結果を得ることはできないが，この判定に限定すれば,それぞれの判定に固有なある有限の精度を確保できれば正しく判定することができる．この原理に基づいて，すべての判定計算を整数計算に帰着させ，決して判定を誤らない世界を構築するアルゴリズム設計法を，整数帰着法という名称で提唱し，その有効性を基礎的な幾何計算問題において確認しつつある．しかしこのアルゴリズム設計法はそれぞれの判定計算に必要な精度をあらかじめ人手によって評価しなければならないというわずらわしさがある．本研究では，ロバスト符号化の分野で開発が進んでいるユニバーサル符号と整数帰着法を融合させることによって，整数帰着法に必要とされる多倍長

の計算精度を自動的に確保する機構を確立する．

(3) 記号摂動法

幾何計算においてソフトウエアのロバスト性を阻害する要因の一つは，幾何構造の退化である．一般に，退化状況は非常に多くの場合に分かれ，そのすべてに対して例外処理を用意することは，アルゴリズムの設計においてもソフトウエアの実装においても，困難な作業である．本研究では，幾何問題を記述する空間を，ユークリッド空間に無限小を表す記号を追加して拡大した代数系を作り，そこで問題を扱うことによって例外の生じない世界をつくる．このように例外の生じない世界へ変換して計算する方法は，記号摂動法と呼ばれる．本研究では，符号理論の分野との融合を図ることによって，不定元記号を含む記号操作を自動化し，記号摂動による退化回避ソフトウエアの自動生成法を開発する．

(4) 超図形理論

関数に関する合成積の演算が逆元を持つように関数の世界を拡大すると超関数が得られるが，それと同様の代数的操作によって，図形から超図形が得られることを私達は発見し，その超図形の性質の究明と，超図形理論体系の構築を行っている [1]．本研究では，超図形の間の演算が，可換かつ結合的であることに着目し，超図形の並列計算法を開発する．そのために，並列計算の分野との融合を図り，ロバスト性と高速性を同時に達成する超図形計算原理を確立する．

(5) ディジタル画像技術の利用

幾何計算の中には，結晶成長ボロノイ図の計算などのように，厳密な計算を効率よく行うことはほとんど不可能なほど難しい問題が多い．それらに対する近似解法として，ディジタル画像の形式で解を求める方法が有力である．特に，偏微分方程式の差分解法とディジタル画像処理を融合することによって安定な近似計算法を作ることができる．この方向の研究としては，結晶成長ボロノイ図の計算，悪意をもった敵の間をぬう障害物回避経路の探索などを行ってきた [2]．この方法の計算例をさらに集めるとともに，ロバスト幾何計算アルゴリズムを作るための基礎技術として体系化していく．

3　大域的連続性を保つ曲面表現法

自由な形状の曲面を表す代表的方法の一つは，その曲面が通過すべきいくつかの点を空間に指定し，それらを通る曲面を生成する方法 || すなわち補間法 || である．さまざまな補間曲面が提案されているが，その多くはスプライン曲面として作ったパッチを貼り合わせるものである．このような曲面では，一つ一つのパッチは十分になめらかに作ることができるが，それらを貼り合わせると，大域的に見て不自然なうねりが生じたり，あるいは逆に，必要以上に平らな部分が生じたりすることが多い．このような不自然さをもたらさないロバストな補間法を追求してきた．

まず最初に，地図上の離散的な点での標高データが与えられたとき，それらを通る曲面を生成することによって地形を推定するアルゴリズムを作った．上に述べた不自然さを克服するために，ここでは，4 次の四角形ベジエパッチを貼り合わせる方法を用いた．貼り合わせの境界線に沿って G1 連続性を保つところまでは従来の技術を利用したが，さらに余った自由度を，曲率の 2 乗の和が最小となるように決定する方法を新たに構成した．この方法を数値計算実験によって調べたところ，従来のものよりよい大域的なめらかさを達成できることがわかった．すなわち，不自然なうねりや平らさを避けることができた．

ただし，この方法では，曲面全体にかかわるパラメータを同時に調整しなければならないため，解法は大規模連立一次方程式の解法に帰着された．したがって，解を求めるためには，多くの計算時間が必要である．

上の標高データの補間問題では，曲面を 2 変数関数として扱うものであった．したがって，地形で言えば，オーバーハングのない地面を扱うものであった．一方，オーバーハングも含む 3 次元空間の任意の曲面を表現したい場面も多い．そこで次にそのような補間問題を扱った．すなわち，空

間にいくつかの点を指定すると同時に，それらの点を頂点とする三角形メッシュを与えたとき，それらの点を通り，かつ与えられたメッシュと同じ位相構造をもつ曲面を構成する問題である．

この問題に対しては，二つのアルゴリズムを構成した．

その第一は，私達の標高データの補間法を借用したものである．すなわち，曲率の 2 乗和の最小化をめざすことによって，不自然なうねりを防止する方法である．ただし，オーバーハングも許す曲面に対して，直接的にこの方針で最適解を探そうとすると，非線形な連立方程式を扱うことになり得策ではないため，ここでは，局所的に標高データの当てはめ問題として定式化し，それらを全体で連立させる方針をとった．これによって，オーバーハングがあっても，連立一次方程式に帰着でき，扱いやすい問題に帰着できるようになった．

ただし，この方法では，補間点の局所性が保たれない．なぜなら，一つの頂点を動かすと，補間曲面全体にその影響が及ぶからである．このことは，数値計算上の不安定性の要因ともなるため，避けなければならない．

以上のことを反省して，第二の方法では，局所的に最適解に近づけることを反復する，ある種の反復解法としてまとめることにした．すなわち，なんらかの初期曲面から出発し，曲面の部分修正 || たとえば，4 個程度の曲面パッチのみにかかわる修正 || をくり返す．これによって計算時間の大幅な短縮と，安定性の向上を達成することができた．

これらは，位相優先に基づくロバスト計算法の開拓に属すもので，博士課程 2 年の室谷浩平君との共同研究 [3, 4] によるものである．

4 細分割を利用した曲面メッシュの圧縮法

立体を表すための三角形メッシュデータは，アニメーションへの応用しやすさなどの理由から，近年よく使われるようになってきている．したがって，そのデータの蓄積や伝送のために，メッシュデータの圧縮が脚光を浴びつつある．そこで，目標とする曲面に近い細分割曲面を作り，そのもとになった粗いメッシュを圧縮データとみなす圧縮法を提案し，その有効性を計算機実験によって確認することができた．

この方法の圧縮手順は以下のとおりである．

まず第一ステップでは，与えられた三角形メッシュデータで囲まれた 3 次元領域を，いくつかの星状形へ分割する．そのためには，任意に選んだ三角形から出発して，星状形であるという性質が保たれる範囲で，できるだけたくさんの隣り合う三角形を集めるというタイプのグリーディ算法を用いる．

第二ステップでは，それぞれの星状形部分に着目して，一つ一つ独立に圧縮する．そのために，任意の簡単な立体形状から細分割で得られる曲面を構成し，それをオリジナルメッシュと照合することによって足りない頂点を補ったり，頂点同士の一対一対応を作ることを目指して頂点を追加する方法を考えた．そして，頂点を新しく追加するためには，星状形の核の 1 点から，半直線を出し，それと両曲面との交点の近くに新しい頂点を導入する．

第三ステップでは，十分に頂点同士の対応がとれるまで，頂点の追加とフィードバックを行う．

この研究は，位相優先の考え方を利用したもので，修士課程 1 年の川原田寛君との共同研究 [5] である．

5 二等分線をもたないボロノイ図の計算法

平面を生成元の勢力圏へ分割するボロノイ図およびその一般化の多くのものは，二つの生成元の勢力の境界となる二等分線を使って構成できる．しかし，すべてのボロノイ図がそのような性質をもつわけではない．ここでは，二等分線をもたないボロノイ図の例をいくつかあげて，その計算法を考察した．

そのようなボロノイ図の代表例は，結晶成長ボロノイ図と，電荷分布ボロノイ図である．

いくつかの核となる点から，異なる結晶が異なるスピードで等方的に成長するとする．このとき，すでに結晶の作られた領域に他の結晶が入り込むことはできないので，成長スピードの速い結晶は，成長スピードの遅い結晶を避けて回り込む必要があるため，その場合のボロノイ図の境界線は，複雑な曲面となり，しかも他の母点の影響も受けるために，二等分線という概念は消滅する．

もう一つの例は，いくつかの正の点電荷が固定された場面で生じる．ここに負の電荷をもつ自由粒子を置くと，どれかの正電荷に引きつけられる．そのとき，この自由粒子の初期位置は，引きつけられた点電荷の勢力圏に属すと定義する．このようにして空間を勢力圏に分割した図形を電荷ボロノイ図とよぶ．

このボロノイ図においては，3 個以上の正の点電荷が存在する場合には，2 個の電荷の作る勢力の二等分線とは全く異なる境界によって，勢力圏が作られる．したがって，二等分線はボロノイ図には現れない．

従来のボロノイ図構成アルゴリズムでは，2 等分線をどのように組み合わせるかを工夫することによって効率を上げようとしてきた．一方，このように二等分線をもたないボロノイ図は，従来の計算幾何学的アプローチによって計算することが非常に難しい．このような場面では，何らかの近似的計算にたよらざるを得ない．

本研究では，結晶成長ボロノイ図，および電荷の作るボロノイ図を近似的にディジタル画像の形式で表現するアルゴリズムを構成した．結晶成長ボロノイ図に対しては，結晶の成長を表す偏微分方程式を導き，それをアイコナール方程式のための高速前進法とよばれる算法を改良して解く方法を構成した．これは，画素の数を N とするとき，O(N log N) の計算時間でボロノイ図を描くものである．

一方，電荷ボロノイ図に対しては，自由粒子が電場で受ける力によって移動する物理現象を，コンピュータの中でシミュレートすることによって勢力圏を作るのが基本である．ただし，すべての画像からこの計算を行うと膨大な時間がかかるため，計算の有効利用による効率化をはかった．

まず，このボロノイ図では，すべての勢力圏が無限遠方の点を含むことを利用して，画像の境界上の画素のみを出発点とする軌跡の追跡を実行し，その軌跡が通過する画素の属する勢力圏も同時に決定するルールを構成した．次に，この方法では判定できない残りの画素に対しては，それを囲むまわりの画素のラベルから属する勢力圏を決定することを試みる．さらに，それでも決定できない画素のみに対して，個別の軌跡追跡を行う．このような 3 段階の処理に分けることによって，効率を著しく向上させることができた．

この研究は，ディジタル画像の構造を利用したロバスト幾何計算に属するものである．

参考文献

[1] K. Sugihara: Invertible Minkowski sum of polygons. 10th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, Bordeaux, 2002, pp. 350{359.

[2] K. Kobayashi and K. Sugihara: Crystal Voronoi diagram and its applications. Future Generation Computer Systems, vol. 18 (2002), pp. 681{692.

[3] K. Murotani and K. Sugihara: G1 surface interpolation using Gregory patches over irregular meshes. NICOGRAPH International 2002, Tokyo, pp. 97{102.

[4] K. Murotani and K. Sugihara: G1 surface interpolation for irregularly located data. Geometric Modeling and Processing |Theory and Applications, Wako, 2002, pp. 187{196.

[5] H. Kawaharada and K. Sugihara: Compression of Arbitrary Mesh Data Using Subdivision Surfaces. Technical Reports METR 2003-09, Dept. of Math. Informatics, Univ. of Tokyo, 2003.