2020 年度 / 2020 School Year

大学院入学試験問題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　学 / Mathematics

試験時間 / Examination Time:　10:00–12:30

注 意 事 項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第1問から第3問まであり，日本文は1頁から3頁，英文は4頁から6頁である．全問を日本語ないし英語で解答すること．
   Three problems appear on pages 1–3 in Japanese and pages 4–6 in English in this booklet. Answer all of three problems in Japanese or English.
4. 解答用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given three answer sheets. You must use a separate answer sheet for each problem. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill this box with your examinee's number.

(草稿用紙)

第1問

正方行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

とする．また，行列 $\boldsymbol{I}$ は単位行列とする．実正方行列 $\boldsymbol{X}$ に対して，$\exp(\boldsymbol{X})$ を

$$\exp(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \boldsymbol{X}^k \right) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{X} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{X}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{X}^3 + \cdots$$

と定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の全ての固有値と，それらに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルとして，ノルムは 1 かつ第一要素は非負実数であるものを選べ．

(2) 非負整数 n に対して，$\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．

(3) $\exp(\boldsymbol{A})$ を求めよ．

(4) α を実数とするとき，$\exp(\alpha\boldsymbol{B})$ が次式のように表せることを示せ．

$$\exp(\alpha\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} + (\sin\alpha)\boldsymbol{B} + (1 - \cos\alpha)\boldsymbol{B}^2$$

ただし，ケーリー・ハミルトンの定理を用いてもよい．

(5) 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ が与えられたとき，3 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\| \exp\left(\frac{2\pi k}{n} \boldsymbol{B} \right) \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x} \right\|^2$$

とおく．ただし，$n \geq 2$ とする．このとき，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{a}$ において f が最小になることを示せ．

第2問

xy 平面内の滑らかな曲線 $\boldsymbol{p} = (p(t), q(t))$ $(t \in [a, b])$ を考える．時刻 $t = a'$ から b' までの $\boldsymbol{p}$ の長さ $\ell_{a',b'}$ は

$$\ell_{a',b'} = \int_{a'}^{b'} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

と定義され，$\boldsymbol{p}$ の全長 $\ell_{a,b}$ を L で表す．曲線 $\boldsymbol{p}$ は，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = (0,0)$ とはならないものとする．時刻 a から t までの $\boldsymbol{p}$ の長さ $\ell_{a,t}$ を変数 $s = s(t)$ で表すと，$\boldsymbol{p}$ を媒介変数 $s \in [0, L]$ の曲線とみることができる．そして，s も時刻と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) 以下の等式を示せ．

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)^2} = 1$$

(2) $\theta = \theta(s)$ を時刻 s における $\boldsymbol{p}$ の接線ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s} = \left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}, \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)$ と x 軸とのなす角とする．このとき，以下の等式を示せ．

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

以下では，曲線 $\boldsymbol{p}$ は，滑らかな閉曲線で，凸集合 K の境界となっているものとする．また，$\boldsymbol{p}$ は，反時計方向に K をまわるものとする．

(3) 任意の時刻 s で $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \geq 0$ となることを説明せよ．

(4) K に含まれない点 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ は，時刻 $s \in [0, L)$ および $\boldsymbol{x}$ と K の距離 r によって，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(s) + r\boldsymbol{u}(s)$$

と一意に表すことができる．ここで，$\boldsymbol{u}(s)$ は，時刻 s における $\boldsymbol{p}$ の単位法線ベクトルで，K の外を向いているものとする．そのような $\boldsymbol{x} = (x, y)$ に対して，以下の等式を示せ．

$$\left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix}\right| = 1 + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

(5) 非負実数 D に対し，K_D を K から距離 D 以内にある点の集合とする．このとき，K_D の面積 $A_D = \displaystyle\int\!\!\int_{K_D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ は，K の面積 A と $\boldsymbol{p}$ の全長 L を用いて

$$A_D = A + LD + \pi D^2$$

と表せることを示せ．

第3問

n 人のアルバイト候補者を面接し，その中の最適任者を採用したい．ただし，$n \geq 2$ とする．候補者にはあらかじめ順位 1，順位 2，$\cdots$，順位 n までの絶対的順位が定まっており，すでに面接した候補者についてはそれらの間の相対的順位が分かるものとする．面接は一人ずつ順に行うが，候補者の現れる順番はランダムに決定され，事前には分からない．採用プロセスでは，すでに面接した候補者の間での相対的順位に基づいて採否の決定が行われ，さらに以下の条件が課される．

- 各候補者の面接の直後に，その候補者の採否を決定する．
- ある候補者の採用が決まった時点で採用プロセスを終了する．
- 過去に不採用にした候補者を採用することはできない．
- $n-1$ 回までの面接で採用しなかったときは，n 番目の候補者を無条件で採用する．

アルバイトの採用において次のような戦略をとる．ただし，$1 < r \leq n$ とする．

⋆ $r-1$ 回の面接までは無条件で候補者を不採用にする．

⋆ 以降の面接では，候補者がその $r-1$ 人の中での最良候補（相対的順位 1）よりも良ければ採用する．

この戦略で，絶対的順位 1 の候補者を採用する確率を $P_n(r)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $P_4(2)$ を求めよ．

(2) $P_{10}(3) = \dfrac{2}{10} \times \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{9}\right)$ となることを示せ．

(3) n 人の候補者に対して，k 回目の面接で絶対的順位 1 の候補者を採用する確率を求めよ．ただし，$r \leq k \leq n$ である．

(4) 以下の漸化式において，A, B に入る式を求めよ．

$$P_n(r) = \boxed{\quad A \quad} + \boxed{\quad B \quad} \times P_n(r+1)$$

ただし，A, B には n, r と定数からなる式が入る．

(5) $q = r/n$ とする．n が十分大きいときに $P_n(r)$ は $-q \ln q$ で近似できることを説明せよ．さらに，$-q \ln q$ の最大値を与える $q \in (0, 1]$ の値を求めよ．ただし，$\ln$ は自然対数を表す．

Problem 1

Square matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are given by

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

For a real square matrix $\boldsymbol{X}$, $\exp(\boldsymbol{X})$ is defined as follows:

$$\exp(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \boldsymbol{X}^k \right) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{X} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{X}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{X}^3 + \cdots,$$

where $\boldsymbol{I}$ is a unit matrix. Answer the following questions.

(1) Calculate all eigenvalues of $\boldsymbol{A}$ and the corresponding eigenvectors whose norm is one and whose first element is a nonnegative real.

(2) Calculate $\boldsymbol{A}^n$, where n is a nonnegative integer.

(3) Calculate $\exp(\boldsymbol{A})$.

(4) Show that $\exp(\alpha\boldsymbol{B})$ is represented by the following equation:

$$\exp(\alpha\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} + (\sin\alpha)\boldsymbol{B} + (1 - \cos\alpha)\boldsymbol{B}^2,$$

where α is a real number. You may use the Cayley–Hamilton theorem.

(5) A function f of 3-dimensional real vector $\boldsymbol{x}$ is given as follows:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\| \exp\left(\frac{2\pi k}{n} \boldsymbol{B} \right) \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x} \right\|^2,$$

where $\boldsymbol{a}$ is a 3-dimensional real vector, and $n \geq 2$. Show that f takes the minimum value at $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{a}$.

Problem 2

Let $\boldsymbol{p} = (p(t), q(t))$ ($t \in [a, b]$) be a smooth curve in the xy-plane. The length $\ell_{a',b'}$ of $\boldsymbol{p}$ from time $t = a'$ to b' is defined by

$$\ell_{a',b'} = \int_{a'}^{b'} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

and the total length $\ell_{a,b}$ of $\boldsymbol{p}$ is denoted by L. Suppose that $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = (0,0)$ never holds. Let variable $s = s(t)$ be defined as the length $\ell_{a,t}$ of $\boldsymbol{p}$ from time a to t. Then the curve $\boldsymbol{p}$ is parametrized by the variable $s \in [0, L]$, where s is also referred to as time. Answer the following questions.

(1) Show that the following equation holds:

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)^2} = 1.$$

(2) Let $\theta = \theta(s)$ be the angle between the tangent vector $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\right)$ of $\boldsymbol{p}$ at time s and the x-axis. Show that the following equation holds:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

In the following, suppose that $\boldsymbol{p}$ is a smooth closed curve and is the boundary of a convex set K, where $\boldsymbol{p}$ rounds around K in the counterclockwise direction.

(3) Explain that $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \geq 0$ holds for any time s.

(4) A point $\boldsymbol{x} = (x, y)$ that is not contained in K is uniquely represented as

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(s) + r\boldsymbol{u}(s)$$

by time $s \in [0, L)$ and the distance r between $\boldsymbol{x}$ and K, where $\boldsymbol{u}(s)$ is the unit normal vector of $\boldsymbol{p}$ at the time s with direction toward the outside of K. Show that the following equation holds for such an $\boldsymbol{x} = (x, y)$:

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix}\right| = 1 + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

(5) For a nonnegative real number D, let K_D be the set of points whose distance from K is at most D. Show that the area $A_D = \int\int_{K_D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ of K_D is represented as

$$A_D = A + LD + \pi D^2$$

by the area A of K and the total length L of $\boldsymbol{p}$.

Problem 3

Consider hiring the best part-time worker by interviewing n applicants, where $n \geq 2$. It is assumed that the absolute ranking (rank 1, rank 2, $\cdots$, rank n) of the applicants is determined in advance, and that the relative ranking of the applicants already interviewed is available. The applicants are interviewed one by one, but the order of applicants is random and unknown. In the selection process, the decision to accept or reject an applicant is based on the relative ranking of the applicants already interviewed, and the following conditions are imposed:

- Immediately after an interview, the interviewed applicant is either accepted or rejected.
- Once an applicant is accepted, the selection process terminates.
- Previously rejected applicants cannot be recalled or accepted.
- If no applicants are accepted in the first $n-1$ interviews, the n-th applicant is accepted unconditionally.

Suppose that we use the following hiring strategy, where $1 < r \leq n$.

⋆ Reject the first $r-1$ applicants unconditionally.

⋆ Hereafter, accept the first subsequent applicant who is better than the best applicant among the above $r-1$ applicants (the applicant with the relative rank 1).

Let $P_n(r)$ be the probability of accepting the applicant with the absolute rank 1 in this strategy. Answer the following questions.

(1) Calculate $P_4(2)$.

(2) Show that $P_{10}(3) = \dfrac{2}{10} \times \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{9}\right)$.

(3) Derive the probability of accepting the applicant with the absolute rank 1 among n applicants at the k-th interview. Note that $r \leq k \leq n$.

(4) Consider the following recursive relation

$$P_n(r) = \boxed{\quad A \quad} + \boxed{\quad B \quad} \times P_n(r+1).$$

Express A and B by n, r and some constants.

(5) Let $q = r/n$. Explain that $P_n(r)$ approximately becomes $-q \ln q$ when n is large enough. Moreover, calculate the value of $q \in (0, 1]$ that maximizes $-q \ln q$. Note that ln stands for natural logarithm.

(草稿用紙)

(草稿用紙)