平 成 29 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　学

試験時間　　10:00～12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 本冊子には第 1 問から第 3 問まである．全問を日本語ないし英語で解答すること．
4. 解答用紙 3 枚が渡される．1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

(草稿用紙)

第1問

３次元ベクトル $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ は式

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を満たすものとする．ただし，x_0, y_0, z_0, α は実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{3}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $x_n + y_n + z_n$ を x_0, y_0, z_0 を用いて表せ．

(2) 行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ を求めよ．

(3) 行列 A を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ を用いて表せ．

(4) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ を x_0, y_0, z_0, α を用いて表せ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ を求めよ．

(6) 以下の式

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{(x_n, y_n, z_n)\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}}{(x_n, y_n, z_n)\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}$$

を x_0, y_0, z_0 の関数とみなして，$f(x_0, y_0, z_0)$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$ とする．

第2問

実数値関数 $u(x,t)$ が $0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0$ で定義されている．ここで，x と t は互いに独立である．偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (*)$$

の解を次の条件

$$\text{境界条件：}\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$
$$\text{初期条件：}\quad u(x,0) = x - x^2$$

のもとで求める．ただし，定数関数 $u(x,t) = 0$ は明らかに解であるから，それ以外の解を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を計算せよ．ここで，n, m はともに正の整数とする．

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\ \sin(m\pi x)\ \mathrm{d}x$$

(2) x のみの関数 $\xi(x)$ および t のみの関数 $\tau(t)$ を用いて，$u(x,t) = \xi(x)\tau(t)$ とおけるとする．任意の定数 C を用いて，ξ および τ が満たす常微分方程式をそれぞれ表せ．関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ が任意の x と t について $f(x) = g(t)$ を満たす場合は，$f(x)$ と $g(t)$ が定数関数となることを用いてもよい．

(3) 設問 (2) の常微分方程式を解け．次に，境界条件を満たす偏微分方程式 $(*)$ の解の一つが次の式で表される $u_n(x,t)$ で与えられることを示し，α, β を正の整数 n を用いて表せ．

$$u_n(x,t) = e^{\alpha t}\sin(\beta x)$$

(4) 境界条件と初期条件を満たす偏微分方程式 $(*)$ の解は $u_n(x,t)$ の線形結合として次の式で表される．c_n を求めよ．設問 (1) の結果を用いてもよい．

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

第3問

(1) 連続確率変数 T の確率密度関数 $f(t)$ が λ を正の定数として

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で表されるとき，T はパラメータ λ の指数分布に従うという．この確率変数の平均値を求めよ．またこの指数分布の確率分布関数 $F(t) = P(T \leq t)$ を求めよ．なお，$P(X)$ は事象 X が起こる確率である．

(2) 設問 (1) の分布が無記憶であること，即ち任意の $s > 0, t > 0$ に対して

$$P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t)$$

が成立することを示せ．なお，$P(X|Y)$ は事象 Y が起こった条件のもとで事象 X が起こる確率である．

(3) 問題の解答を始めてから解答を終えるまでの時間を解答所要時間と呼ぶことにする．ある問題に対して n 人の学生の解答所要時間が全て同じパラメータ λ_0 の指数分布に従うものとする．n 人が同時に解答を始めたとき，最も早く解答を終える学生の解答所要時間の確率分布関数と平均値を示せ．ただし，各学生の解答所要時間はそれぞれ独立であるとする．

(4) 学生 A, B の解答所要時間がパラメータ λ_A, λ_B の指数分布にそれぞれ従うものとする．この二人が同時に解答を開始したときに，学生 A の方が学生 B より先に解答を終える確率を求めよ．

(5) 優秀な学生である秀夫君と，他 10 名の学生に問題を同時に解かせる．各学生の解答所要時間は指数分布に従うものとし，また秀夫君以外の各学生の平均解答所要時間は，すべて秀夫君の平均解答所要時間の 10 倍であるとする．秀夫君が 1 番目に解答を終える確率，および 4 番目に解答を終える確率をそれぞれ求めよ．

(草稿用紙)

(草稿用紙)