平 成 28 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　学

試験時間　　10:00〜12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 本冊子には第1問から第3問まである．全問を日本語ないし英語で解答すること．
4. 解答用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること．解答用紙のおもて面に書ききれないときは，裏面にわたってもよい．
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと．
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

(草稿用白紙)

第 1 問

非負整数 n について，トリボナッチ数列 $\{T_n\}$ は次のように定義される．

$$\begin{cases} T_0 = T_1 = 0 \\ T_2 = 1 \\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

以下の設問に答えよ．

(1) 任意の非負整数 n について式 (1.1) を満たす行列 A を求めよ．

$$\begin{pmatrix} T_{n+3} \\ T_{n+2} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \\ T_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

(2) 行列 A のランクおよび特性方程式 (固有値が満たす方程式) を求めよ．

(3) 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とするとき，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を用いて表せ．

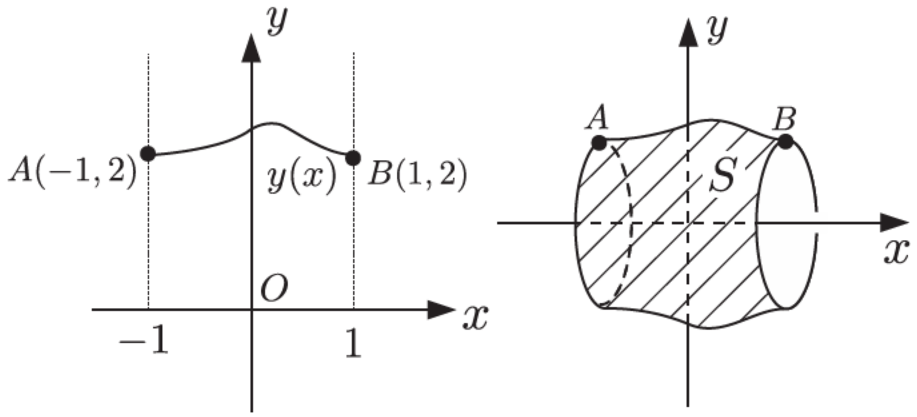
(4) 行列 A は実数固有値を一つのみ有することを示せ．また，これを λ_1 としたとき，$1 < \lambda_1 < 2$ であることを示せ．

(5) ある複素定数 c_1, c_2, c_3 を用いて $T_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_3\lambda_3^n$ と表せることを示せ．c_1, c_2, c_3 の値を明示的に求める必要はない．

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \lambda_1$ を示せ．

第 2 問

xy 平面上の点 $A(-1,2)$ と点 $B(1,2)$ を結ぶ二回微分可能関数 $y(x)$ を考える．次に，曲線 $y(x)$ を x 軸のまわりに回転させてできる筒状図形の外側の表面積を S とする．以下の設問に答えよ．



(1) 表面積 S が以下の式で表されることを示せ．

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} F(y, y')\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

$$F(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}. \tag{2.2}$$

ただし $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ である．

(2) 曲線 $y(x)$ は任意の x に対して以下のオイラー・ラグランジュ方程式を満たすとする．

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{2.3}$$

$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ と式 (2.3) を考えることで，以下の関係式が成り立つことを示せ．

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c. \tag{2.4}$$

ただし c はある定数である．

(3) 曲線 $y(x)$ が満たすべき微分方程式を y, y', c を用いて表せ．

(4) 曲線 $y(x)$ を x と c を用いて表せ．また，定数 c が満たすべき方程式を求めよ．

第 3 問

以下の設問に答えよ．

(1) n 個の同等な玉を，互いに区別できる r 個の箱に入れる方法は何通りあるか．ただし，$n \geq 1$，$1 \leq r \leq n$ とし，どの箱にも少なくとも 1 個の玉が入るものとする．

次に，黒玉 n 個と白玉 m 個を無作為に 1 列に並べることを考える．同じ色のひと続きの並びを連と呼び，黒玉の連の個数を r，白玉の連の個数を s とする．ただし，$n \geq 1$，$m \geq 1$，$1 \leq r \leq n$，$1 \leq s \leq m$ とする．たとえば

$$\underline{\bullet\,\bullet}\ \underline{\circ\,\circ\,\circ}\ \underline{\bullet\,\bullet\,\bullet}\ \underline{\circ\,\circ}\ \underline{\bullet}$$

の場合は $r = 3, s = 2$ となる．

(2) 黒玉同士，白玉同士を区別しないで並べる方法は全部で何通りあるか．

(3) 黒玉の連の個数が r，白玉の連の個数が s となる確率 $P(r, s)$ を求めよ．

(4) 黒玉の連の個数が r となる確率 $P(r)$ を求めよ．

(5) $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ を使って，次式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{\ell=0}^{\min\{n,m\}} \binom{n}{\ell}\binom{m}{\ell} = \binom{n+m}{m} \tag{3.1}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\min\{n-1,m\}} \binom{n}{\ell+1}\binom{m}{\ell} = \binom{n+m}{m+1} \tag{3.2}$$

(6) r の期待値 $E(r)$ と分散 $V(r)$ を求めよ．また，$N = n+m$，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{n}{N} = \lambda$ とするとき（λ は実数の定数），$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{E(r)}{N}$ と $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{V(r)}{N}$ を求めよ．

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)