平成２５年度

大学院入学試験問題

数　　学

試験時間　10:00～12:30

注意事項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 本冊子には第１問から第３問まである。全問を日本語ないし英語で解答すること。
4. 解答用紙３枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。解答用紙のおもて面に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第1問

以下の設問に答えよ.

(1) $(c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ c_6\ c_7) = (1\ 2\ -8\ 20\ -44\ 92\ -188)$ に対して, 整数 $k\ (\geq 1)$ と $k \times k$ 定数行列 $\boldsymbol{M}$ の組が存在し, それらは全ての $i = 1, 2, \ldots, 7-k$ について次式を満す.

$$\begin{pmatrix} c_{i+1} \\ c_{i+2} \\ \vdots \\ c_{i+k} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} c_i \\ c_{i+1} \\ \vdots \\ c_{i+k-1} \end{pmatrix}$$

順に $k = 1, 2, \ldots$ の場合を調べることにより, それらのうちで k が最も小さい組を求めよ.

(2) 設問 (1) の $c_i\ (i = 1, 2, \ldots, 7)$ は, 設問 (1) で求めた k と $\boldsymbol{M}$ の組, および実数の定数ベクトル $\boldsymbol{L}\ (\in \mathbb{R}^{1\times k})$, $\boldsymbol{N}\ (\in \mathbb{R}^{k\times 1})$ を用いて, $c_i = \boldsymbol{L}\boldsymbol{M}^{i-1}\boldsymbol{N}$ と表せる. そのような $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}$ の組のひとつを示せ.

(3) 設問 (1), (2) で求めた $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}$ を用い, $c_i = \boldsymbol{L}\boldsymbol{M}^{i-1}\boldsymbol{N}$ によって $c_8, c_9, \ldots$ を定義する. 次の行列 $\boldsymbol{C}$ のランクを求めよ. 導出過程も示すこと.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \cdots & c_{10} \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & \cdots & c_{11} \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & \cdots & c_{12} \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & \cdots & c_{13} \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & \cdots & c_{14} \\ c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & \cdots & c_{19} \end{pmatrix}$$

(4) 設問 (1), (2) で求めた $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}$ と $k \times k$ 単位行列 $\boldsymbol{I}$ を用いて, スカラの x を変数とする関数 $f(x) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{I} - x\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{N}$ を定義する. $f(x)$ の $x = 0$ におけるテイラー級数を $f(x) = f_1 + f_2 x + f_3 x^2 + \cdots$ とする. $f_i\ (\in \mathbb{R}), i = 1, 2, \ldots$ を $c_i\ (= \boldsymbol{L}\boldsymbol{M}^{i-1}\boldsymbol{N}), i = 1, 2, \ldots$ を用いて表せ. 導出過程も示すこと. 必要ならば対角行列 $\boldsymbol{D}$ についての次式を用いてよい.

$$\left.\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(\boldsymbol{I} - x\boldsymbol{D})^{-1}\right|_{x=0} = i!\boldsymbol{D}^i,\ i = 1, 2, \ldots$$

第2問

実数軸上の関数 $f = f(x)$ であって，$f(0) = 0$, $f(1) = 1$ となるものの集合を $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F}$ の元 f に対して，$I = I[f]$ を

$$I[f] = \int_0^1 \left[\{f(x)\}^2 + \left\{ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right\}^2 \right] \mathrm{d}x$$

と定義する．I を最小化する $\mathcal{F}$ の元を求めたい．以下の設問に答えよ．ただし，本問題において考える関数はすべていたるところ十分滑らかな関数とする．

(1) 任意の $f, g \in \mathcal{F}$ と任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$I[(1-t)f + tg] \leq (1-t)I[f] + tI[g]$$

となることを示せ．

(2) 任意の $g \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I[(1-t)f + tg] \Bigg|_{t=0} = 0$$

が成り立つような $f \in \mathcal{F}$ を考える．f が満たすべき常微分方程式を導け．その際，次の事実を利用してよい．

関数 F が，$G(0) = G(1) = 0$ となる任意の関数 G に対して，

$$\int_0^1 G(x)F(x)\mathrm{d}x = 0$$

を満たすなら，$x \in [0,1]$ に対して $F(x) = 0$ である．

(3) 設問 (2) で導いた常微分方程式の解は I を最小化する．その理由を説明せよ．

(4) 設問 (2) で導いた常微分方程式の解を求めよ．

第3問

ある袋の中には，はじめに黒色の玉1個のみが入っている．その袋に対し，次の作業Aを繰り返す問題を考える．

作業A: 袋の中から玉を無作為に1個取り出し，取り出した玉の色が黒の場合，袋には存在しない色の玉を新たに追加し，取り出した黒色の玉も袋に戻す．黒以外の色の玉であれば，取り出した玉と同色の玉を袋に1つ追加し，取り出した玉も袋に戻す．

袋から取り出すまで玉は区別できないものとする．以下の設問に答えよ．

(1) 作業Aを3回繰り返した後，袋の中の玉の色（黒色を除く）が2種となる確率と，3種となる確率をそれぞれ求めよ．

(2) 作業Aを4回繰り返した後，袋の中の玉の色（黒色を除く）が3種となる確率を求めよ．

(3) 作業Aをn回繰り返したときに袋の中の玉の色（黒色を除く）が1種のみとなる確率は$1/n$となることを示せ．

(4) 作業Aをn回繰り返した後，袋の中の玉の色（黒色を除く）がm種類となる確率$q_n(m)$を求めよ．必要ならば，以下に定義する$S(n,m)$を使ってもよい．

$$S(n,m)=\begin{cases} S(n-1,m-1)+(n-1)S(n-1,m), & n>m>0 \\ 1, & n=m\geq 0 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

(5) 袋の中の玉の色（黒色を除く）の種類が3以上となる確率が35%を超える作業Aの繰り返し回数の最小値を求めよ．その根拠も述べよ．

(6) 設問(4)で定義した確率$q_n(m)$が，自然数nに対し以下の式を満たすことを示せ．

$$\sum_{m=1}^{n} m q_n(m) = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)