平 成 2 4 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　　学

試験時間　　10:00～12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 本冊子中には第１問から第３問まである。全問を日本語ないし英語で解答すること。
4. 解答用紙３枚が渡される。１問ごとに必ず１枚の解答用紙を使用すること。解答用紙のおもて面に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第1問

正方行列 D が直交行列であるとは，$DD^\top$ と $D^\top D$ とがともに単位行列 I となることをいう．ここで $D^\top$ は D の転置行列を表す．また，次の事実を証明なしに用いてよい：$D^\top D$ が単位行列ならば，$DD^\top$ も単位行列．

行列 A を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ．

(1) 行列 $A^\top A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2)

$$A^\top A \;=\; U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} U^\top$$

となるような実数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と直交行列

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$$

を求めよ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ かつ $u_{31} \geq 0, u_{32} \geq 0, u_{33} \geq 0$ となるようにせよ．ここで $\mathbf{u}_i$ は次のような 3×1 の列ベクトルを表す．

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{pmatrix}$$

(3) $B^2 = A^\top A$ となるような行列 B のうち，固有値がすべて正のものを一つ求めよ．

(4) 3×3 の行列 C を

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{u}_1 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\mathbf{u}_2 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$$

によって定める．このとき，AC が直交行列であることを証明せよ．

(5)

$$A = V \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} W$$

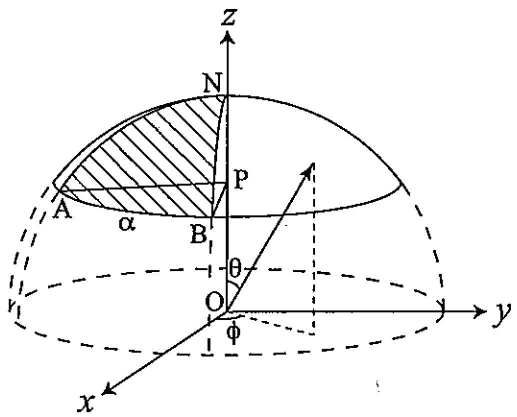
となるような 3×3 直交行列 V, W をみつけよ．

第2問

xyz 空間内にある, 原点 O を中心とする単位球面の, 上側の半球面を H とする.

$$H = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

下図のように, H と平面 $z = \cos\alpha$ の交線 (円になる) から, 長さ α の弧を切り取り, 端点を A, B とする. ここで, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ である. また, 点 N を $(0, 0, 1)$, 点 P を $(0, 0, \cos\alpha)$ とする.



図

以下の各問に答えよ.

(1) 角 APB の大きさ ∠APB を求めよ.

(2) 三角形 NAB(三本の線分 NA, AB, BN で囲まれた平面図形) の面積を $T(\alpha)$ とする.

$$\frac{T(\alpha)}{\alpha^2}$$

が $\alpha \to 0$ で収束することを示し, その極限値を求めよ.

(3) H のうち, 平面 $z = \cos\alpha$ 上およびその上側の部分を H_α とする.

$$H_\alpha = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq \cos\alpha\}$$

H_α 上の点の座標を, 図の θ, ϕ を用いて表せ. また, θ, ϕ の取りうる値の範囲を求めよ.

(4) H_α の曲面積を求めよ.

(5) H_α 上で, 三本の弧 AB, 弧 BN, 弧 NA で囲まれた部分 (図の斜線部) の曲面積を $S(\alpha)$ とする. ただし, 弧 BN, 弧 NA はそれぞれ, H 上で B と N, N と A を最短距離で結ぶ曲線 (大円の一部) である.

$$\frac{S(\alpha)}{\alpha^2}$$

が $\alpha \to 0$ で収束することを示し, その極限値を求めよ.

第 3 問

あるお菓子には，K 種類のカードのうちの 1 枚が等確率で付属しており，任意の異なる r 種類 $(K \geq r)$ のカードを集めると賞品がもらえる．お菓子を一つずつ順々に購入し，n 番目のお菓子を入手した時に，r 種類のカードが初めて揃う確率を $p(n,r)$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) $p(n,r)$ を次のように表すことを考える．

$$p(n,r) = \sum_{i=1}^{n+1-r} C_i \, p(n-i, r-1)$$

C_i を K,r,i の式で表せ．

(2) 次の関係式を考える．

$$p(n,r) = A \, p(n-1,r) + B \, p(n-1,r-1)$$

A,B を K,r の式で表せ．

(3) z の多項式 $P(z,r)$ を次のように定める．

$$P(z,r) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,r) z^n$$

この時，$P(z,r), P(z,r-1)$ の間に次の関係式が成り立つことを示せ．

$$(K-(r-1)z)P(z,r) = (K-r+1)zP(z,r-1)$$

(4) 賞品をもらうために購入しなければならないお菓子の個数の期待値が $P'(1,r)$ であることを示せ．なお，P' は z による P の微分である．

(5) $K=r=7$ の時に賞品をもらうために購入しなければならない商品の個数の期待値を求めよ．

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)