平成23年度

大学院入学試験問題

数　学

試験時間　10:00～12:30

注意事項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 本冊子には第1問から第3問まである。全問を日本語ないし英語で解答すること。
4. 解答用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙のおもて面に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第１問

行列 A, 行列 B, 関数 $f(n)$ を以下のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & b & a \\ a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし，a, b は $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ なる実数，n は正の整数とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A のすべての固有値を求めよ．また行列 A の線形独立な３つの固有ベクトルをあげよ．

(2) 行列 B のすべての固有値を求めよ．また行列 B の線形独立な６つの固有ベクトルをあげよ．

(3) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ を求めよ．

(4) $a = 3$, $b = 2$ のとき $f(n)$ を求めよ．

第2問

$x > 0$ における微分方程式

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x+4)\frac{dy}{dx} + 3y = 4x + 4$$

を考える．以下の各問に答えよ．

(1) $v = x^r$ が

$$x\frac{d^2v}{dx^2} + (x+4)\frac{dv}{dx} + 3v = 0$$

の解であるような r の値を求めよ．

(2) 問い (1) で得られた r に対して $y = x^r u$ とおくとき，u が満たす微分方程式を求めよ．また，$u = x^4$ は，得られた微分方程式の解であることを示せ．

(3) 問い (2) で得られた微分方程式を満たす $\dfrac{du}{dx}$ の一般形を求めよ．

(4) y の一般解を求めよ．

第3問

B_i (i は自然数) は，確率 p で 1，確率 $1-p$ で -1 の値をとる確率変数であり，B_i と B_j は $i \neq j$ のとき互いに独立であるとする．ただし，$0 < p < 1$ とする．また，$S_N = \sum_{i=1}^{N} B_i$ (N は自然数) とし，$E[\cdot]$ は期待値を表すものとする．以下の各問に答えよ．

(1) S_4 のとりうる値とそれぞれの値をとる確率を全て求めよ．

(2) $S_4 = 2$ のとき $B_1 = 1$ である条件付確率を求めよ．

(3) $i \neq j$ であるとき，任意の自然数 m，n に対し，$E[{B_i}^m {B_j}^n] = E[{B_i}^m]E[{B_j}^n]$ が成り立つことを示せ．

(4) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき，S_N の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(5) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき，$E[{S_2}^4]$ を求めよ．

(6) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき，$K_N = \dfrac{E[{S_N}^4]}{E[{S_N}^2]^2}$ を求めよ．また，$\lim_{N \to \infty} K_N$ を求めよ．

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)