平 成 21 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　学

試験時間　　10:00〜12:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 本冊子には第 1 問から第 3 問まである。全問を日本語ないし英語で解答すること。
4. 解答用紙 3 枚が渡される。1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。解答用紙のおもて面に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第 1 問

3 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ は漸化式

$$\boldsymbol{x}_n = A\boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{u} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

をみたすものとする．ただし

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

である．a, b, c, d は実数の定数であり，$a \neq 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を a で表せ．

(2) A の固有ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ を a で表せ．ただし，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{r}$ をそれぞれ最大固有値と最小固有値に対応させ，$\|\boldsymbol{p}\| = \|\boldsymbol{r}\| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\|\boldsymbol{q}\| = 1$ となるようにせよ．

(3) $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{x}_0$ を $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の線形和で表せ．

(4) $\boldsymbol{x}_n = \alpha_n \boldsymbol{p} + \beta_n \boldsymbol{q} + \gamma_n \boldsymbol{r}$ とする．$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ を，$\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}$ を用いて表せ．

(5) $\boldsymbol{x}_n$ を求めよ．

(6) $\boldsymbol{x}_n$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ とのなす角を θ_n とする．ただし

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$ となるために a, b, c, d のみたすべき必要十分条件を示せ．

第2問

ある系の温度を加熱装置を用いて制御することを考える．

時刻 t における系の温度を $x(t)$ とする．加熱装置のスイッチが切れているとき，温度 $x(t)$ は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x \tag{$*$}$$

に従い，加熱装置のスイッチが入っているとき，温度 $x(t)$ は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x \tag{$**$}$$

に従うものとする．

まず，スイッチを操作しないときの系の挙動を考える．

(1) 時刻 0 における初期条件 $x(0) = x_0$ の下で，微分方程式 $(*)$ および $(**)$ の解をそれぞれ求めよ．

次に，$0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ をみたす温度の閾値 θ_0, θ_1 が与えられたとき，系の温度が θ_0 以上 θ_1 以下になるように，以下の規則に従って自動的にスイッチを操作することを考える．系の温度が θ_0 以下でスイッチが切れていればスイッチを入れ，系の温度が θ_1 以上でスイッチが入っていればスイッチを切る．この他の場合にはスイッチを操作しない．

なお，時刻 0 における温度 x_0 は θ_0 より高く，時刻 0 においてスイッチは切れているものとする．

(2) 時刻 0 以降，初めてスイッチが入る時刻 t_1 を求めよ．

(3) 時刻 t_1 以降，温度は周期的に変化する．周期 τ を求めよ．

(4) 1 周期の間の温度の時間平均 $\bar{x} = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+\tau} x(t)\mathrm{d}t$ と，閾値の平均 $\bar{\theta} = \dfrac{\theta_0 + \theta_1}{2}$ を考える．これらの値の差 $\bar{x} - \bar{\theta} = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+\tau} (x(t) - \bar{\theta})\mathrm{d}t$ は，ある関数 $f(x, \bar{\theta})$ を用いて

$$\bar{x} - \bar{\theta} = \frac{1}{\tau}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(x, \bar{\theta})\mathrm{d}x$$

と表すことができる．関数 $f(x, \bar{\theta})$ を求めよ．

(5) 閾値の平均 $\bar{\theta}$ が一定値を取るように θ_0, θ_1 を変化させることを考える．$\bar{\theta} < \dfrac{1}{2}$ であるとき，$w = \dfrac{\theta_1 - \theta_0}{2}$ の増大にともない $(\bar{x} - \bar{\theta})\tau$ は単調減少することを示せ．

第3問

ランダムウォークに関する以下の問いに答えよ．本問において，粒子は，一回の移動で各隣接点のいずれかに等確率で移動するものとする．

図3.1のように，x 軸上の $0 \leq x \leq n$ $(n \geq 2)$ の範囲にある整数値座標上の点を考える．ランダムウォークは，粒子が $x = 0$ または $x = n$ に到達した時点で終了する．$x = k$ $(0 \leq k \leq n)$ にいる粒子が，$x = n$ に到達してランダムウォークを終了する確率を $P_n(k)$ とする．

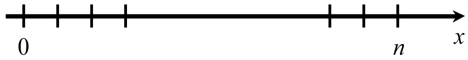

図3.1

(1) $1 \leq k \leq n-1$ について，$P_n(k)$ を $P_n(k-1)$ と $P_n(k+1)$ を用いて表せ．

(2) $P_3(0) = 0$ および $P_3(3) = 1$ であることを用いて，$P_3(2)$ を求めよ．

(3) $P_n(k)$ を求めよ．

(4) $x = k$ $(0 \leq k \leq n)$ にいる粒子が，ランダムウォークを終了するまでの平均移動回数 $T_n(k)$ を求めよ．

図3.2のように，x 軸上の $-2 \leq x \leq 4$ の範囲にある整数値座標上の点および y 軸上の $-2 \leq y \leq 3$ の範囲にある整数値座標上の点を考える．例えば，$(0, 1)$ の隣接点は $(0, 2)$, $(0, 0)$ であり，原点 $(0, 0)$ の隣接点は $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ である．ランダムウォークは，粒子が $(x, y) = (4, 0)$, $(0, 3)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ のいずれかに到達した時点で終了する．

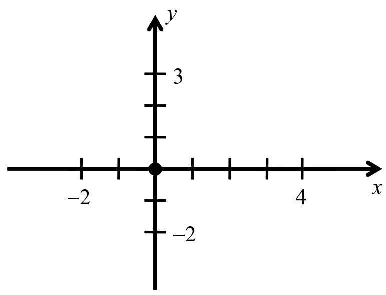

図3.2

(5) 原点 $(0, 0)$ にいる粒子が，$(x, y) = (4, 0)$ に到達してランダムウォークを終了する確率 $P_{(4,0)}$ を求めよ．

(6) 原点 $(0, 0)$ にいる粒子が，ランダムウォークを終了するまでの平均移動回数 T を求めよ．

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)