平 成 19 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　学

試験時間　　10:00〜12:30

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 本冊子中の 6 問のうち、任意の 3 問を選んで日本語ないし英語で解答すること。
4. 解答用紙 3 枚が渡される。1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること。解答用紙のおもて面に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第 1 問

$\mathbb{R}^4$ 上の関数

$$f(x,y,u,v) = \exp\left(-\frac{(x-u)^2+(y-v)^2}{2}\right)$$

について以下の問いに答えよ．ここで，$p \in \mathbb{R}$ に対し $\exp p$ は e^p を表す．

(1) $f(x,y,u,v)$ を u,v の関数とみなして，$(u,v)=(0,0)$ における u,v に関するテイラー展開を求めよ．ただし，$|u| \ll 1, |v| \ll 1$ とし，1 次の項まで求めればよい．以下，この問いで得られた結果を $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$ の関数とみなし，$g(x,y,u,v)$ と表す．

(2) $(u,v) = (a\cos\theta, a\sin\theta)$, ただし $0 < a \ll 1$, $0 \le \theta < 2\pi$ とするとき，

$$h(x,y) = \int_0^{2\pi} g(x,y,a\cos\theta,a\sin\theta)\cos\theta\ d\theta$$

を求めよ．

(3) $x^2+y^2+2x+2y=1$ を満たし，かつ $h(x,y)$ を最大にする (x,y) を求めよ．

第 2 問

A を正則な実正方行列として，以下の各条件 (1)〜(6) を考える．それぞれの条件につき，その条件を満たす任意の A に対し A^{-1} も同じ条件を満たすか否か解答せよ．満たす場合は証明を示せ．一方，満たさない場合は反例を，条件を満たさないことの証明とともに，示せ．なお，$A^\top$ は A の転置を表す．また，A の (i, j) 要素を $a_{i,j}$ で表す．

(1) 正規行列．すなわち $AA^\top = A^\top A$.

(2) 下三角行列．すなわち $i < j$ に対して $a_{i,j} = 0$.

(3) 単位副対角行列．すなわち $a_{i,n-i+1} = 1$ で他の要素は 0．ここで n は A の次数である（つまり A は $n \times n$ 行列である）．例えば $n = 4$ のとき次のようになる．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) 正行列．すなわちすべての i, j に対して $a_{i,j} > 0$.

(5) 三重対角行列．すなわち $|i - j| > 1$ に対して $a_{i,j} = 0$. 例えば次のような行列になる．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

(6) Persymmetric matrix. すなわちすべての i, j に対して $a_{i,j} = a_{n-j+1,n-i+1}$. ここで n は A の次数である．すなわち副対角（右上隅と左下隅を結ぶ対角）に関して対称であり，例えば $n = 4$ のとき次のようになる．

$$A = \begin{pmatrix} \zeta & \delta & \beta & \alpha \\ \theta & \epsilon & \gamma & \beta \\ \iota & \eta & \epsilon & \delta \\ \kappa & \iota & \theta & \zeta \end{pmatrix}$$

第3問

三次元ユークリッド空間において，直交座標系を固定し，以下を考える．

原点を中心とする半径 a（ただし $a > 0$）の球面を S とする．S 上の任意の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ とし，この点における S の外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$ とする．また，S 上での面積分を $\int_S dS$ で表す．

以下の問いに答えよ．

(1) 面積分

$$I = \int_S \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|^3} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

を計算せよ．

(2) S の内側にある点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ （$|\boldsymbol{p}| < a$）を考える．この $\boldsymbol{p}$ に対し，面積分

$$\int_S \frac{\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}|^3} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

を計算し，上の問い (1) の I と同じであることを示せ．面積分と体積積分に関するガウスの発散定理を用いてよい．

(3) 原点を中心とする半径 b（ただし $a > b > 0$）の球体を B とする．S 上の任意の点 Q におけるベクトル $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{F} = \int_B \frac{\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}|^3} \, dxdydz$$

のように定義する．ここで，B に含まれる任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3$（$|\boldsymbol{r}| \leq b$）とし，$\int_B dxdydz$ は B 上での体積積分を表す．ただし，$\top$ は転置を表す．このとき面積分

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

を求めよ．面積分と体積積分に関するガウスの発散定理を用いてよい．

(4) S 上の任意の点 Q において，上の問い (3) のベクトル $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{q}$ に平行である．その理由を説明せよ．また，$\boldsymbol{F}$ を求めよ．

第 4 問

$\mathbb{R}$ 上の連続微分可能な実数値関数 $f(t)$ が以下の性質を満たしているものとする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} t|f(t)|^2 dt = 0, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} t|f(t)|^2 = 0$$

さらに，$f(t)$ の導関数 $f'(t)$ は $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt < \infty$ を満たしているものとする．$F(\omega)$ を $f(t)$ のフーリエ変換

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．また，$\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $g(t)$ が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$ を満たすとき，$g(t)$ と，そのフーリエ変換 $G(\omega)$ との間にパーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

が成り立つものとしてよい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \omega|F(\omega)|^2 d\omega = 0$ を示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\omega||F(\omega)|^2 d\omega < \infty$ とする．

(2) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $g(t)$, $h(t)$ が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt < \infty$ を満たしているものとする．実数 S を $S = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h(t) dt$ と定める．このとき，任意の実数 λ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(t) + \lambda S h(t)|^2 dt$ の値が負にならないことを用いて，以下の不等式を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt \geq S^2$$

(3) 実数 Δ_t および Δ_ω を

$$\Delta_t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{および} \quad \Delta_\omega = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\omega F(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

と定める．このとき，$\Delta_t \Delta_\omega \geq \dfrac{1}{2}$ を示せ．

(4) $\Delta_t \Delta_\omega = \dfrac{1}{2}$ が成り立つような $f(t)$ の例を挙げよ．

第 5 問

$\boldsymbol{u}(t)$ を非負実数 t に対して $\mathbb{R}^2$ に値をもつ関数とする．初期条件 $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ の下で，以下の微分方程式の解 $\boldsymbol{u}(t) = (x(t), y(t))^\top$ を考える．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -xF\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - y \\ \frac{dy}{dt} &= -yF\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + x \end{aligned} \tag{$*$}$$

ただし，初期値 $\boldsymbol{u}_0$ は $\mathbb{R}^2$ の任意の元であり，F は $F(s) = (s-1)(s-2)$ で定義される関数である．また，$\top$ は転置を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 極座標への変数変換 $(x, y)^\top = (r\cos\theta, r\sin\theta)^\top$ によって定まる非負実数値関数 $r(t)$ および実数値関数 $\theta(t)$ が満たすべき微分方程式を求めよ．

(2) 上の問い (1) で求めた微分方程式の解を，初期条件 $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$ の下で求めよ．

(3) 微分方程式 $(*)$ の解 $\boldsymbol{u}(t)$ が定数関数であるとき，その定数値 $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^2$ を平衡点と呼ぶ．また，解 $\boldsymbol{u}(t)$ が t についての周期関数であり，定数関数でないとき，集合 $\{\boldsymbol{u}(t) \mid t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ を周期軌道と呼ぶ．

すべての平衡点および周期軌道を求めよ．周期軌道は，多項式関数 $G(x, y)$ を用いて集合 $\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid G(x, y) = 0\}$ の形で示すこと．

(4) 任意の初期値 $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して $H(x(t), y(t))$ が t についての単調非増加関数となるような多項式関数 $H(x, y)$ を一つ定めよ．ただし，$H(x, y)$ は定数関数ではないものとする．

第 6 問

$\{X_j; j = 1, 2, 3, \cdots\}$ を互いに独立かつ同一分布で，非負の整数値をとる確率変数の列とする．一般に非負整数の確率変数 X の値が k となる確率を $Pr(X = k)$ とするとき，$-1 \leq z \leq 1$ に対して，確率母関数 $G_X(z)$ を z^X の期待値

$$G_X(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} Pr(X = k) z^k$$

で定義する．確率母関数 $G_{X_j}(z)$ は j によらず，これを以下 $G(z)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) Y をポアソン分布 $Po(\gamma)$ に従う確率変数とする（$\gamma > 0$）．ここで，$Po(\gamma)$ は，

$$Pr(Y = k) \quad = \quad \frac{\gamma^k e^{-\gamma}}{k!}$$

で定義される（k は非負整数）．Y の確率母関数 $G_Y(z)$ を求めよ．

(2) $G(z)$ を用いて $G_{S_n}(z)$ を表せ．ここで，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ で，n は任意の非負整数とする．ただし $S_0 = 0$ とする．

(3) N を全ての X_j と独立な非負整数の確率変数とし，新たに確率変数 $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ を定義したとき，$G_{S_N}(z) = G_N(G(z))$ であることを示せ．

(4) N を全ての X_j と独立な，ポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従う確率変数としたとき，S_N がポアソン分布に従うための X_j の分布を求めよ．ただし，$\lambda > 0$ で，X_j は定数ではないとする．

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)