平成17年度

大学院入学試験問題

数　　学

午前 10:00〜12:30

注意事項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
4. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
5. 6問のうち、任意の3問を選んで解答すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

(草稿用白紙)

第1問

1から6の目のある正六面体のサイコロがあり，時刻が1進むごとに床に接触している面の4つの辺のうち1つを選択し，その辺を軸にしてサイコロを90度回転させる．この回転操作の例を図1に示す．4つの辺の中から1つの辺を選択する確率は等しい．ただし，このサイコロは1の目の面と辺を共有する面が2から5の目の面で，1の目の面の裏側に6の目の面があるものとする．この時，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻tのとき1の目が出ている確率を$p_1(t)$，2から5の目が出ている確率を$p_2(t)$，6の目が出ている確率を$p_3(t)$とする．

$$\begin{bmatrix} p_1(t+1) \\ p_2(t+1) \\ p_3(t+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}$$

としたときの行列Aを求めよ．

(2) 行列Aの固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) A^nを求めよ．ただし，nは正の整数とする．

(4) 時刻$t=0$のときに1の目が出ている状態から開始したとして，時刻tのときに1の目が出ている確率$p_1(t)$を求めよ．ただし，tは正の整数とする．

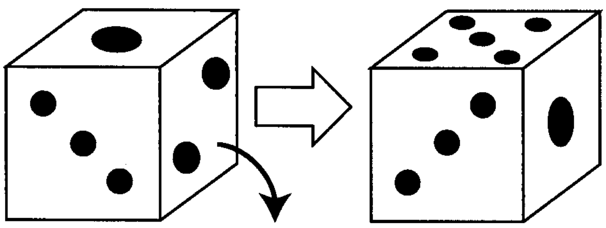

図1　正六面体のサイコロの回転操作．

第2問

ある集合 T と，その非空の真部分集合 A, B, C, D を考える．一般に写像 f による集合 E の像を $f(E)$ で表す．条件

(i) $B \subseteq D$
(ii) $C \subseteq A$
(iii) T から T へのあらゆる写像 f に対して，$f(A) \subseteq B$ ならば $f(C) \subseteq D$

について，条件 "(i) かつ (ii)" が条件 (iii) と同値であることを，以下の問いに従って示せ．

(1) "(i) かつ (ii)" ならば (iii) であることを証明せよ．
(2) (iii) ならば (i) であることを証明せよ．
(3) (iii) ならば (ii) であることを証明せよ．

第3問

$A_1, A_2, A_3, \ldots$ を整数の集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 上の互いに独立な一様乱数とし，確率変数 J を，$A_J \neq A_{J+1}$ を満たす最小の添え字とする．確率変数 $J_1, J_2, \ldots, J_n$ は 互いに独立で，J と同一の分布に従うものとする．確率変数 L_n, U_n を $L_n = \min\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$，$U_n = \max\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ と定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) J の期待値を求めよ．

(2) L_n の期待値を求めよ．

(3) 正整数 k に対し，確率 $\mathrm{Prob}[U_n = k]$ を求めよ．

(4) $\lim_{k \to \infty} \mathrm{Prob}[U_{m^k} = k]$ を求めよ．

第4問

n を正の整数とするとき，n 次元ユークリッド空間における半径 a の球の体積

$$V_n(a) = \int\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leq a^2} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

について以下の問いに答えよ．

(1) $V_n(a)$ が漸化式

$$V_n(a) = aI_nV_{n-1}(a)$$

を満たすことを示せ．ただし，

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\mathrm{d}\theta$$

である．

(2) $V_n(a)$ を漸化式

$$V_n(a) = c_nV_{n-2}(a)$$

で表し，その係数 c_n を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} V_n(a)$ を求めよ．

第5問

絶対値が 1 でない任意の複素数 α に対して，実変数 t の関数を

$$\psi(t,\alpha)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(e^{2\pi jt}-\alpha)$$

とするとき，以下の問いに答えよ．ただし j は虚数単位を表す．

(1) $\psi(t,\alpha)$ の具体形を求めよ．

(2) 関数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(\frac{1}{2}-e^{2\pi jt}+e^{4\pi jt})$$

を関数 ψ を用いて表せ．

(3) $z=e^{2\pi jt}$ と置いて，次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \psi(t,\alpha)\mathrm{d}t$$

(4) $z=e^{2\pi jt}$ と置いて，次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \psi(t,\alpha_1)\psi^*(t+t_0,\alpha_2)\mathrm{d}t$$

ただし "*" は複素共役，α_1,α_2 はともに絶対値が 1 でない任意の複素数，t_0 は任意の実数とする．

第 6 問

すべての素数からなる集合を $P = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ とし，$t \geq 0$ の範囲で連立微分方程式

$$\begin{cases} 2\dot{x} - ay &= \sin(2t) \\ 2ax + \dot{y} &= \cos(2t) \end{cases}$$

を考える．ただし，$\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$a$ は $a \in P$ なる定数である．初期条件が $x(0) = y(0) = 0$ である場合の解を $x = x_a(t), y = y_a(t)$ とし，以下の問いに答えよ．

(1) $a > 2$ のとき，$x_a(t)$ と $y_a(t)$ を求めよ．

(2) $x_2(t)$ と $y_2(t)$ を求めよ．

(3) 級数

$$\sum_{a \in P} \frac{1}{a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

が発散することを用いて，級数

$$\sum_{a \in P} x_a(\pi) = x_2(\pi) + x_3(\pi) + x_5(\pi) + x_7(\pi) + \cdots$$

が発散することを証明せよ．

(草稿用白紙)

(草稿用白紙)