平成16年度

大学院入学試験問題

数　　学

午後 1:00〜3:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
4. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
5. 6問のうち、任意の3問を選んで解答すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

q を $0 < q < 1$ を満たす実数とし，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ q^2 & 1-q^2 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．
(2) $\exp(A)$ を

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

と定義する．このとき，$\exp(A)$ を求めよ．
(3) $\exp(A)$ の行列式が最大となる q およびその最大値を求めよ．

第2問

関数 $f(x)$ は, $\cos(2x) + 2\cos(x) + 1 \neq 0$ を満たす実数 x に対して次のように定められるものとする:

$$f(x) = \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{\cos(2x) + 2\cos(x) + 1}.$$

以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の $\pi < x < 2\pi$ におけるグラフの概形を図示せよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ を, 上の関数 $f(x)$ を用いて以下の手順で帰納的に定める.

1. $a_1 = 4$.
2. a_n が定義されているとき, $t_n = a_n + 2^{-n}$ として,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & (f(t_n) \geq 0 \text{ のとき}), \\ t_n & (f(t_n) < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき,

$$b_n = 2^n(a_{n+1} - a_n)$$

で定められる数列 $\{b_n\}$ の最初の 10 項 $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ を求めよ. ただし, $\pi = 3.14159\cdots$ を用いてよい.

第3問

集合 X に対して，2^X は X の部分集合全体からなる集合を表すものとする．このとき，どのような集合 X に対しても，次の条件 (C) を満たす写像 $f : X \to 2^X$ は存在しないことを証明せよ．

条件 (C)　集合 2^X の任意の要素 A に対し，集合 X の要素 a が存在して，$f(a) = A$ が成り立つ．

第4問

次の投票問題を考えよう:

「二人の候補者 P, Q から一人を選ぶ投票で, 候補者 P が p 票, 候補者 Q が q 票を得て, 候補者 P が選ばれた. 白票も無効票もなく, 総票数は $p+q$ であった. 1 票ずつ無作為な順序で開票していく過程で, P がいつも Q より多い票数を得る確率を求めよ.」

整数の全体の集合を $\mathbf{Z}$ と表し, (x,y) 平面において整数座標をとる点の集合を $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ で表す. a と b を $a<b$ を満たす整数とする. $\mathbf{Z}$ の部分集合 $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$ を定義域とし, 整数の値をとる関数 s が, $k = a+1, a+2, \ldots, b-1, b$ に対して

$$|s(k) - s(k-1)| = 1$$

を満たすとき, 関数 s を, 点 $(a, s(a))$ から点 $(b, s(b))$ に至る道と呼ぶ. $\mathbf{Z}^2$ の 2 点 $\mathrm{A} = (a,\alpha), \mathrm{B} = (b,\beta)$ $(a<b)$ に対し, A から B に至る道の集合を $\Omega(\mathrm{A},\mathrm{B})$ で表す.

$k = 0, 1, \ldots, p+q$ に対し, k 票まで開票したときの P の得票数から Q の得票数を引いた値を $s(k)$ として関数 s を定めるとき, 関数 s は点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から点 $\mathrm{D} = (p+q, p-q)$ に至る道となる. したがって, P の得票数から Q の得票数を引いた値の推移の全体は, $\Omega(\mathrm{O},\mathrm{D})$ で表される. また, 開票の過程で候補者 P がいつも候補者 Q より多い票数を得る道の全体 V は

$$V = \{s \in \Omega(\mathrm{O},\mathrm{D}) \mid s(k) > 0, k = 1, 2, \ldots, p+q\}$$

と表される.

以下の問に答えよ.

(1) $\mathbf{Z}^2$ の任意の点 $\mathrm{B} = (b,\beta)$ $(b>0)$ に対し, 集合 $\Omega(\mathrm{O},\mathrm{B})$ が空集合でないための必要十分条件は $b+\beta \geq 0, b-\beta \geq 0$ でかつ $b+\beta$ が偶数であることである. これを示せ.

(2) 任意の有限集合 S に対し, その要素の総数を $n(S)$ と表す. $\mathbf{Z}^2$ の点 $\mathrm{B} = (b,\beta)$ $(b>0)$ に対し, 集合 $\Omega(\mathrm{O},\mathrm{B})$ が空集合でないとき,

$$n(\Omega(\mathrm{O},\mathrm{B})) = \binom{b}{\frac{b+\beta}{2}}$$

であることを示せ. ただし, $\binom{i}{j}$ は互いに異なる i 個のものから j 個を取り出す組合せの数を表す.

(3) $\mathbf{Z}^2$ の 2 点 $\mathrm{A} = (a,\alpha), \mathrm{B} = (b,\beta)$ は, $0 \leq a < b, \alpha > 0, \beta > 0$ を満たすとする. 点 $\mathrm{A}' = (a, -\alpha)$ を x 軸に関する点 A の鏡像点と呼ぶ. $\Omega(\mathrm{A},\mathrm{B})$ の部分集合 W を

$$W = \{s \in \Omega(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mid \text{道 } s \text{ は } x \text{ 軸と少なくとも一つの共有点を持つ}\}$$

で定義する. このとき, 次が成り立つことを示せ:

$$n(W) = n(\Omega(\mathrm{A}', \mathrm{B})).$$

(4) $\mathrm{C} = (1, 1)$ とし, x 軸に関する点 C の鏡像点を $\mathrm{C}' = (1, -1)$ とする. このとき, 次が成り立つことを示せ:

$$n(V) = n(\Omega(\mathrm{C}, \mathrm{D})) - n(\Omega(\mathrm{C}', \mathrm{D})).$$

(5) はじめに述べた投票問題で要求されている確率を求めよ.

第5問

複素数 z に関する複素関数 $f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$ は，複素平面の点 z_0 を中心とする半径 r_0 の開円板 $D = \{z \mid |z - z_0| < r_0\}$ において正則であり，定数関数ではないとする．ここで，$u(z), v(z)$ はそれぞれ $f(z)$ の実部，虚部である．

以下の問に答えよ．

(1) 開円板 D 内の点 z と $0 < r < r_0 - |z - z_0|$ を満たす実数 r に対して，

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta, \quad v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

が成り立つことを，コーシーの積分公式から示せ．

(2) 関数 u および v は，開円板 D において最大値をとり得ないことを示せ．また最小値もとり得ないことを示せ．

(3) 関数 f の微分 $f'(z)$ が 0 でない開円板 D 内の点 z を考える．点 z を通り u が一定の曲線と点 z を通り v が一定の曲線は，点 z で互いに直交することを示せ．

第6問

A と B を異なる実定数とする．$u(t,x)$ は, $t \geq 0, 0 \leq x \leq 1$ において十分なめらかな関数で, 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0,\ 0 < x < 1), \tag{6.1}$$

境界条件

$$u(t,0) = A, \quad u(t,1) = B \qquad (t \geq 0), \tag{6.2}$$

初期条件

$$u(0,x) = \sin(3\pi x) + (B - A)x + A \qquad (0 \leq x \leq 1) \tag{6.3}$$

を満たすものとする.

以下の問に答えよ.

(1) $u(t,x)$ を, x 軸に沿って置かれた十分に細い棒の時刻 t での位置 x における温度とみなしたとき，方程式 (6.1) と境界条件 (6.2) の物理的解釈の一例を述べよ.

(2) (1) の物理的解釈から，時間 $t \to \infty$ のときの $u(t,x)$ の極限 $f(x)$ を推定せよ.

(3) (2) で求めた $f(x)$ を用いて，$u(t,x)$ を

$$u(t,x) = w(t,x) + f(x) \tag{6.4}$$

の形に表したとき，$w(t,x)$ が満たすべき方程式，境界条件，初期条件を求めよ.

(4) $w(t,x)$ が，t のみの関数 $P(t)$ と x のみの関数 $Q(x)$ の積 $P(t)Q(x)$ の形で表せると仮定して，$w(t,x)$ を求めよ.

(5) (4) の結果を利用して $u(t,x)$ を求めよ.