平成14年度

大学院入学試験問題

数　　　学

午後1:00 〜 3:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。解答用紙に書ききれないときは、裏面にわたってもよい。
4. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
5. 6問のうち、任意の3問を選んで解答すること。
6. 草稿用白紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係ない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

kを2以上の整数とし、対角要素は0、非対角要素はすべて$\dfrac{1}{k-1}$である$k\times k$行列をA_kとする。以下の問いに答えよ。

(1) A_3を、3×3直交行列U、3×3対角行列Sを用いて、$A_3 = USU^{\mathrm{T}}$と表せ。ここで、$^{\mathrm{T}}$は転置を表す。

(2) A_4の固有値を求めよ。

(3) A_kの固有値を求めよ。

(4) 正整数nに対して、$(A_k)^n$を求めよ。

(5) A_kの第1列ベクトルを$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$で置き換えた行列を$B_k$とし、

$$p_n = (1\ 0\ \cdots\ 0)(B_k)^n \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k-1} \\ \vdots \\ \frac{1}{k-1} \end{pmatrix}$$

としたとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty}(p_n - p_{n-1})n$$

を求めよ。

第 2 問

2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \end{pmatrix}$ $(i = 1, \ldots, n)$ で、これらが 2 次元空間を張り、かつ $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$ を満たすものが与えられている。ここで、$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{a}_i$ の転置ベクトルを表す。このとき、領域 $S = \{\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} > 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)\}$ 上で定義される関数 $f(\boldsymbol{p})$ を

$$f(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} \log \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}$$

で定める。$\log$ は自然対数である。以下の問いに答えよ。

(1) $$\nabla f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \qquad \nabla^2 f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$$

を求めよ。

(2) S 上の任意の $\boldsymbol{p}$ で $\nabla^2 f(\boldsymbol{p})$ は正定値であることを示せ。

(3) $n = 2$ の場合で $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$ をこの順で行ベクトルとする 2×2 行列を A とし、

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\nabla} f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\boldsymbol{p}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\nabla}^2 f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(\boldsymbol{p}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$$

とする。$\nabla f, \nabla^2 f$ を $\widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}^2 f, A$ を用いて表せ。

(4) $n = 2$ の場合で、S 上の点 $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$ とパラメタ t の関数として表され、$t = 0$ の初期解が $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ でかつ

$$\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} = -(\nabla^2 f(\boldsymbol{p}(t)))^{-1} \nabla f(\boldsymbol{p}(t))$$

なる微分方程式を満たすとして、これを解いて $\boldsymbol{p}(t)$ を求めよ。

第3問

(1) 連続確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が λ を正の定数とし

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

と表される場合、X は指数分布に従うという。X が指数分布に従う連続確率変数のときの平均 $E(X)$、分散 $V(X)$ を定義に従って求めよ。

(2) あるシステムの使用料金 $Y(t)$ は使用時間 t により定義されており、使用開始から3分間以内は a 円、3分を超過すると1分毎に b 円追加される (1分未満は切り上げ)。1回の使用時間 $g(t)$ が平均 T の指数分布に従うと仮定した際の使用料金の平均 $E(Y(t))$ を求めよ。

(3) (2) のシステムの利用者はランダムに到着するとし、1日の間にこのシステムを使用した延べ使用回数を表す確率変数を M とする。ここで、1日を n 等分し各微小時間内にこのシステムを利用する延べ利用回数をそれぞれ $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ とする。$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ は同じ分布で互いに独立であり、$P\{Z_i = 1\} = \frac{\mu}{n}, P\{Z_i = 0\} = 1 - \frac{\mu}{n}$ (μ は正の定数, $i = 1, 2, \cdots, n$) とみなす。n が十分大きいときの M の分布関数 $P\{M = k\}$ を求めよ。

(4) (3) のシステム全体の1日の使用料金の平均を求めよ。

第 4 問

$h(x)$ の x に関するフーリエ変換を

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $g(x) = e^{-ax^2}$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を求めよ。

(2) x と t に関する u の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{A}$$

について、初期条件を $t = 0$ のとき $u(x, 0) = f(x)$、境界条件を $x \to \pm\infty$ で

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x, t) = 0$$

とする。式 (A) をフーリエ変換して、$u(x, t)$ のフーリエ変換 $U(\omega, t)$ に関する常微分方程式を求めよ。

(3) (2) で求めた常微分方程式の解を求めよ。ただし、$f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とする。

(4) $U(\omega, t)$ のフーリエ逆変換を求めることにより、式 (A) の解 $u(x, t)$ を求めよ。

注　この問題では、不足する境界条件に関して、工学応用での典型的な場合を想定して解答することを期待している。

第 5 問

斉次全微分方程式（$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ が斉次式で次数が一致する）

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \tag{A}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $x = uz$, $y = vz$ とおけば、変数 z が分離され次のような微分方程式になることを示せ。

$$\bar{P}(u,v)du + \bar{Q}(u,v)dv + \frac{dz}{z} = 0 \tag{B}$$

(2) 全微分方程式 (A) が積分可能ならば、全微分方程式 (B) が

$$\frac{\partial \bar{P}(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial \bar{Q}(u,v)}{\partial u}$$

を満たす完全微分方程式であることを証明せよ。

(3) 上の結果を利用して、次の全微分方程式

$$yzdx - z^2dy - xydz = 0$$

を解け。

第 6 問

複素関数

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} \qquad (0 < a < 1)$$

を、図に示した原点を中心とする円と実軸に沿う直線の四つの部分からなる積分路に沿って周回積分することを考える。以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ のすべての極と留数を求めよ。

(2) 周回積分

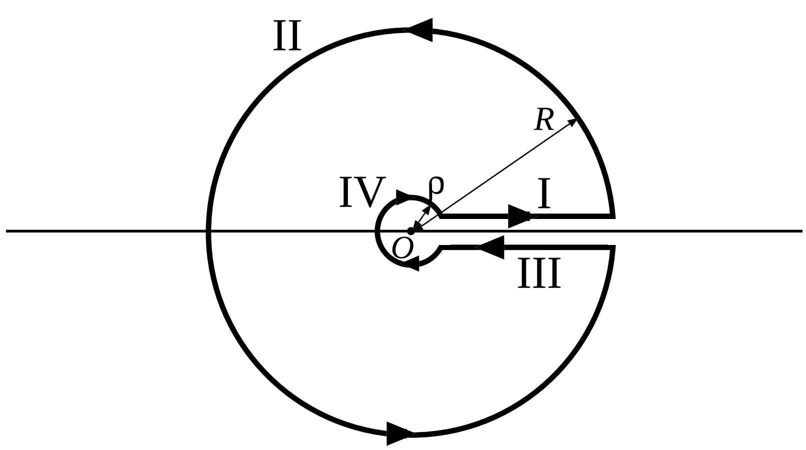
$$\oint f(z)\,dz$$

を求めよ。

(3) 図に示した積分路 II と IV の積分が、それぞれ $R \to \infty, \rho \to 0$ の時、0 に収束することを証明せよ。

(4) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$



積分路