2024 年度 / AY2024

大学院入学試験問題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　学　3 / Mathematics 3

試験時間 / Examination Time:　15:50–16:40

注 意 事 項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には和文および英文の第 3 問がある．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 3 both in Japanese and in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙 1 枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of the answer sheet with your examinee number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft sheets from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheet or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill the above box with your examinee number.

(草稿用紙)

第3問

座標平面を動く粒子を考え，時刻 $t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ における粒子の位置を (X_t, Y_t) とする．粒子の初期位置は $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ とする．また，$(X_t, Y_t) = (a, b)$ のとき，確率 p で $(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (a+1, b)$ となり，確率 q で $(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (a, b+1)$ となり，確率 $1-p-q$ で $(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (a, b)$ となる．ただし p, $q > 0$, $p+q < 1$ とし，相異なる時刻における粒子の動きは独立であるとする．初めて $(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (X_t, Y_t)$ となる粒子の位置を (X, Y) とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $(X, Y) = (1, 2)$ となる確率は $3pq^2(1-p-q)$ であることを示せ．

(2) 非負整数 n に対して，$X + Y = n$ となる確率を求めよ．

(3) 非負整数 n に対して，$X = n$ となる確率を f_n とおく．

  (a) f_0 を求めよ．

  (b) $X \geq n$ という条件のもとで $X \geq n+1$ となる確率を，f_0 を用いて表せ．

  (c) $f_n = (1-f_0)^n f_0$ が成り立つことを示せ．

(4) X の期待値を，p と q を用いて表せ．

(5) X と Y の相関係数

$$\frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sqrt{E[(X-\mu_X)^2]E[(Y-\mu_Y)^2]}}$$

を，p と q を用いて表せ．ここで $\mu_X = E[X]$ は X の期待値，$\mu_Y = E[Y]$ は Y の期待値を表す．

Problem 3

Consider a particle moving on the coordinate plane, and denote the location of the particle at time $t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ by (X_t, Y_t). The initial location of the particle is $(X_0, Y_0) = (0, 0)$. Also, if $(X_t, Y_t) = (a, b)$, then $(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (a + 1, b)$ with probability p, $(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (a, b + 1)$ with probability q, and $(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (a, b)$ with probability $1 - p - q$. Here, it is assumed that p, $q > 0$, $p + q < 1$, and the movements of the particle at different time points are independent. Let (X, Y) denote the location of the particle such that $(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (X_t, Y_t)$ for the first time. Answer the following questions.

(1) Show that the probability that $(X, Y) = (1, 2)$ is $3pq^2(1 - p - q)$.

(2) For non-negative integers n, find the probability that $X + Y = n$.

(3) For non-negative integers n, let f_n denote the probability that $X = n$.

  (a) Find f_0.

  (b) Express the probability that $X \geq n + 1$ given the condition $X \geq n$, using f_0.

  (c) Show that $f_n = (1 - f_0)^n f_0$.

(4) Express the expectation of X using p and q.

(5) Express the correlation coefficient between X and Y

$$\frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sqrt{E[(X - \mu_X)^2]E[(Y - \mu_Y)^2]}}$$

using p and q, where $\mu_X = E[X]$ denotes the expectation of X and $\mu_Y = E[Y]$ denotes the expectation of Y.

(草稿用紙)

(草稿用紙)