2024 年 度 / AY2024

大 学 院 入 学 試 験 問 題

Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　　学　1 / Mathematics 1

試験時間 / Examination Time:　　13:00–13:50

注　意　事　項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.

3. 本冊子には和文および英文の第1問がある．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 1 both in Japanese and in English. Answer the problem in Japanese or English.

4. 解答用紙1枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.

5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of the answer sheet with your examinee number and the problem number you are to answer.

6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft sheets from this problem booklet.

7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.

8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheet or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill the above box with your examinee number.

(草稿用紙)

第１問

$\mathbb{R}^3$ を 3 次元実列ベクトル全体の集合，$\mathbb{R}^{3\times 3}$ を 3×3 の実行列全体の集合とする．$\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3 \in \mathbb{R}^3$ は一次独立な単位長ベクトル，$\boldsymbol{n}_4 \in \mathbb{R}^3$ は $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ と平行でない単位長ベクトルとする．また，正方行列 A, B を

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{n}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{n}_2^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{n}_3^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{n}_3^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{n}_4^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}$$

とする．ここで，$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ はそれぞれ行列 $\mathbf{X}$ の転置行列とベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトルを表す．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数が 3 となるような $\boldsymbol{n}_4$ に関する条件を求めよ．

(2) 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において以下の 3 つの条件を満たす 4 つの平面 $\Pi_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - d_i = 0\}$ (d_i は実数, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) を考える：(i) A の階数は 3 である，(ii) $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - d_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ が空集合ではない，(iii) Π_i ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) に接する球 C ($\subset \Omega$) が存在する．このとき C の中心の位置ベクトルをベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ を用いて $\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{u}$ の形で表す．d_i ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) を用いて $\boldsymbol{u}$ を表せ．

(3) B が正定値対称行列であることを示せ．

(4) 4 つの平面 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - d_i = 0\}$ (d_i は実数, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) への距離の 2 乗和が最小となる点 P を考える．P の位置ベクトルをベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を用いて $\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{v}$ の形で表す．$\boldsymbol{n}_i$, d_i ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) を用いて $\boldsymbol{v}$ を表せ．

(5) $\mathbb{R}^3$ において点 Q_i（位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^3$ とする）を通り $\boldsymbol{n}_i$ に平行な直線を l_i とする（$i = 1,\ 2,\ 3$）．任意の点 R（位置ベクトルを $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ とする）を l_i に直交射影した点を R_i とする．R_i の位置ベクトルを行列 $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ を用いて $\boldsymbol{y} - \mathbf{W}_i(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_i)$ と表す．$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ を単位行列とする．

(a) $\boldsymbol{n}_i$ と $\mathbf{I}$ を用いて $\mathbf{W}_i$ を表せ．

(b) $\mathbf{W}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_i$ を示せ．

(c) 平面 $\Sigma = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\}$ を考える（$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ は非零ベクトル，b は実数）．点 $\mathrm{S} \in \Sigma$ は l_1, l_2, l_3 への距離の 2 乗和を最小にする点である．$\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ が互いに直交するとき，S の位置ベクトルをベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ を用いて

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\right)\boldsymbol{w} + \frac{\boldsymbol{a}b}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$$

の形で表す．ただし，$\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{a}, b$ には依存しないものとする．$\boldsymbol{w}$ を $\mathbf{W}_i$, $\boldsymbol{x}_i$（$i = 1,\ 2,\ 3$）を用いて表せ．

Problem 1

Let $\mathbb{R}^3$ be the set of the three-dimensional real column vectors and $\mathbb{R}^{3\times 3}$ be the set of the three-by-three real matrices. Let $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, and $\boldsymbol{n}_3 \in \mathbb{R}^3$ be linearly independent unit-length vectors and $\boldsymbol{n}_4 \in \mathbb{R}^3$ be a unit-length vector not parallel to $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, or $\boldsymbol{n}_3$. Let $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ be square matrices defined as

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{n}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{n}_2^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{n}_3^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{n}_3^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{n}_4^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}.$$

Here, $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ denote the transpose of a matrix $\mathbf{X}$ and a vector $\boldsymbol{x}$, respectively. Answer the following questions.

(1) Find the condition for $\boldsymbol{n}_4$ such that the rank of $\mathbf{A}$ is three.

(2) In the three-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$, consider four planes $\Pi_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - d_i = 0\}$ (d_i is a real number, and $i = 1, 2, 3, 4$) that satisfy the following three conditions: (i) the rank of $\mathbf{A}$ is three, (ii) $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - d_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4\}$ is not the empty set, and (iii) there exists a sphere C ($\subset \Omega$) to which Π_i ($i = 1, 2, 3, 4$) are tangent. The position vector of the center of C is represented by $\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{u}$ using a vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$. Express $\boldsymbol{u}$ using d_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

(3) Show that $\mathbf{B}$ is a positive definite symmetric matrix.

(4) Consider the point P from which the sum of squared distances to four planes $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - d_i = 0\}$ (d_i is a real number, and $i = 1, 2, 3, 4$) is minimized. The position vector of P is represented by $\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{v}$ using a vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. Express $\boldsymbol{v}$ using $\boldsymbol{n}_i$ and d_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

(5) Let l_i be a straight line through a point Q_i, the position vector of which is $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^3$, parallel to $\boldsymbol{n}_i$ ($i = 1, 2, 3$) in $\mathbb{R}^3$. Let R_i be the orthogonal projection of an arbitrary point R, the position vector of which is $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$, onto l_i. The position vector of R_i is represented by $\boldsymbol{y} - \mathbf{W}_i(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_i)$ using a matrix $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. The identity matrix is denoted by $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   (a) Express $\mathbf{W}_i$ using $\boldsymbol{n}_i$ and $\mathbf{I}$.

   (b) Show that $\mathbf{W}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_i$.

   (c) Consider a plane $\Sigma = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\}$ ($\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ is a non-zero vector, and b is a real number). Let $\mathrm{S} \in \Sigma$ be the point from which the sum of squared distances to l_1, l_2, and l_3 is minimized. When $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, and $\boldsymbol{n}_3$ are orthogonal to each other, the position vector of S is represented by

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\right)\boldsymbol{w} + \frac{\boldsymbol{a}b}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$$

   using a vector $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ which is independent of $\boldsymbol{a}$ and b. Express $\boldsymbol{w}$ using $\mathbf{W}_i$ and $\boldsymbol{x}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

(草稿用紙)

(草稿用紙)