2022 年 度 / 2022 School Year

大 学 院 入 学 試 験 問 題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　　学　2 / Mathematics 2

試験時間 / Examination Time:　　14:25–15:15

注 意 事 項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第 2 問があり，日本文は 1 頁目，英文は 2 頁目である．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 2 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙 1 枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill this box with your examinee's number.

(草稿用紙 / Draft)

第2問

$\alpha \geq 1$ と $n > 0$ に対し以下の積分 $I_n(\alpha)$ を考える．

$$I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{f(\alpha x) - f(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

ただし，実数値関数 $f(x)$ は $x \geq 0$ において連続かつ微分可能で，導関数が連続であり，$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成り立つと仮定する．以下の問いに答えよ．

(1) $J_n(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}I_n(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$ とおく．$J_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\left(f(\alpha n) - f\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)\right)$ であることを示せ．

ここでは，積分と微分が交換可能であることを用いてよい．

(2) $I(\alpha) = \lim_{n\to\infty} I_n(\alpha)$ とおく．任意の $\beta \in [1, \alpha]$ に対して $\lim_{n\to\infty} J_n(\beta)$ が存在し，かつ，これが $[1, \alpha]$ 上一様収束することを示し，

$$I(\alpha) = \int_1^{\alpha} \left(\lim_{n\to\infty} J_n(\beta)\right) \mathrm{d}\beta$$

であることを示せ．

(3) $I(\alpha)$ を求めよ．

(4) 以下の積分を求めよ．ただし，$p > q > 0$ とする．

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-px}\cos(px) - e^{-qx}\cos(qx)}{x}\, \mathrm{d}x$$

Problem 2

Consider the following integral $I_n(\alpha)$ for $\alpha \geq 1$ and $n > 0$.

$$I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{f(\alpha x) - f(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

Assume that a real-valued function $f(x)$ is continuous and differentiable on $x \geq 0$, its derivative is continuous, and $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Answer the following questions.

(1) Define $J_n(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}I_n(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$. Show that $J_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\left(f(\alpha n) - f\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)\right)$.

You can use the fact that the integration and the differentiation commute in this context.

(2) Define $I(\alpha) = \lim_{n \to \infty} I_n(\alpha)$. Show that $\lim_{n \to \infty} J_n(\beta)$ exists for any $\beta \in [1, \alpha]$ and it uniformly converges on $[1, \alpha]$, and show that

$$I(\alpha) = \int_1^{\alpha} \left(\lim_{n \to \infty} J_n(\beta)\right) \mathrm{d}\beta.$$

(3) Obtain $I(\alpha)$.

(4) Calculate the following integral. Note that $p > q > 0$.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-px}\cos(px) - e^{-qx}\cos(qx)}{x} \, \mathrm{d}x$$

(草稿用紙 / Draft)

(草稿用紙 / Draft)