数理情報学専攻 修士課程入学試験問題

Department of Mathematical Informatics

Graduate School Entrance Examination Problem Booklet

専門科目 数理情報学

Specialized Subject: Mathematical Informatics

2023 年 8 月 21 日（月）　10:00 – 13:00

August 21, 2023 (Monday)　10:00 – 13:00

5 問出題，3 問解答 / Answer 3 out of the 5 problems

注　意　事　項 / Instructions

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
Do not open this booklet until the starting signal is given.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
Notify the proctor if there are missing or incorrect pages in your booklet.

(3) 本冊子には第 1 問から第 5 問まであり，日本文は 4 頁から 13 頁，英文は 14 頁から 23 頁である．5 問のうち 3 問を日本語ないし英語で解答すること．
Five problems appear on pages 4–13 in Japanese and pages 14–23 in English in this booklet. Answer 3 problems in Japanese or English.

(4) 答案用紙 3 枚が渡される．1 問ごとに必ず 1 枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．
Three answer sheets will be given. Use one sheet per problem. If necessary, you may use the back of the sheet.

(5) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．
Fill in the examinee number and the problem number in the designated place of each answer sheet. Do not put your name.

(6) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
Do not separate a draft sheet from the booklet.

(7) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.

(8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
Leave the answer sheets and this booklet in the examination room.

受験番号 Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．

Fill in your examinee number.

選択した問題番号 Problem numbers			

上欄に選択した 3 つの問題番号を記入すること．

Fill in the three selected problem numbers.

第 1 問

行列 $A \in \mathbb{R}^{d\times m}$ の第 (i,j) 成分を $a_{i,j}$，転置を $A^\top$ と書き，$\|A\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}^2}$ とする．正方行列 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ のトレースは $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{d} a_{i,i}$ である．また I を $d\times d$ 単位行列とする．

以下では $d < m$ とし，行列 $X, Y \in \mathbb{R}^{d\times m}$ によって与えられる最適化問題

$$\min_{P\in\mathbb{R}^{d\times d}} \|PX - Y\|_{\mathrm{F}}^2 \quad \text{subject to } P^\top P = I \tag{$*$}$$

の最適解 P の集合を $\mathrm{OPT}(X,Y)$ と書く．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 $A, B \in \mathbb{R}^{d\times m}$ の第 j 列ベクトルをそれぞれ a_j, b_j とし，a_j のユークリッドノルムを $\|a_j\|_2$ と書く．行列 $A, B \in \mathbb{R}^{d\times m}$ と正の実数 $w_1, \ldots, w_m$ によって与えられる最適化問題

$$\min_{P\in\mathbb{R}^{d\times d}} \sum_{j=1}^{m} w_j \|Pa_j - b_j\|_2^2 \quad \text{subject to } P^\top P = I$$

の最適解 P の集合が $\mathrm{OPT}(X,Y)$ となるような行列 $X, Y \in \mathbb{R}^{d\times m}$ を一組求めよ．

(2) 行列 $X, Y \in \mathbb{R}^{d\times m}$ によって与えられる最適化問題

$$\max_{P\in\mathbb{R}^{d\times d}} \mathrm{tr}(PXY^\top) \quad \text{subject to } P^\top P = I$$

の最適解 P の集合が $\mathrm{OPT}(X,Y)$ であることを示せ．

(3) 行列 $X, Y \in \mathbb{R}^{d\times m}$ に対して，行列 $XY^\top$ の特異値分解を $XY^\top = U\Sigma V^\top$ と書く．最適化問題 $(*)$ の最適解の 1 つ $P \in \mathrm{OPT}(X,Y)$ を行列 X, Y, U, Σ, V のうちのいくつかを用いて表せ．

第 2 問

$\mathbb{R}^d$ 上で定義された十分滑らかな凸関数 $f(x)$ の最小化問題を考える．ただし，最小解 x^* が存在することを仮定する．$f(x)$ の $x = (x_1, \ldots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ における勾配を $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\right)^\top$ と表す．また，$x \in \mathbb{R}^d$ のユークリッドノルムを $\|x\|_2$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \dfrac{2}{t+1}(v(t) - x(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = -\dfrac{t+1}{2}\nabla f(x(t)) \end{cases} \qquad (*)$$

を $t \geq 0$ に対して考える．ただし初期条件 $x(0), v(0)$ は与えられているものとする．$E(t) = (t+1)^2(f(x(t)) - f(x^*)) + 2\|v(t) - x^*\|_2^2$ とおく．このとき，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leq 0$ を示せ．また，t に依存しないある定数 C が存在して，$f(x(t)) - f(x^*) \leq C/t^2$ が $t > 0$ で成立することを示せ．

(2) 微分方程式 $(*)$ の離散化として

$$\begin{cases} \delta^+ x^{(k)} = \dfrac{2hk+h+2}{(hk+1)^2}(v^{(k+1)} - x^{(k+1)}) \\ \delta^+ v^{(k)} = -\dfrac{2hk+h+2}{4}\nabla f(x^{(k+1)}) \end{cases} \qquad (**)$$

を $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して考える．ただし，δ^+ は任意のスカラーまたはベクトルの列 $\{y^{(k)}\}$ に対して $\delta^+ y^{(k)} = (y^{(k+1)} - y^{(k)})/h$（$h > 0$ は定数）で定義される作用素とする．$x^{(0)} = x(0)$，$v^{(0)} = v(0)$ とし，$(**)$ に解が存在すると仮定する．$E^{(k)} = (hk+1)^2(f(x^{(k)}) - f(x^*)) + 2\|v^{(k)} - x^*\|_2^2$ とおく．このとき，

$$\delta^+ \|v^{(k)} - x^*\|_2^2 = 2(v^{(k+1)} - x^*)^\top(\delta^+ v^{(k)}) - h\|\delta^+ v^{(k)}\|_2^2$$

を示し，さらに $\delta^+ E^{(k)} \leq 0$ を示せ．ただし，任意のスカラー列 $\{a^{(k)}\}, \{b^{(k)}\}$ に対し成立する関係式 $\delta^+(a^{(k)}b^{(k)}) = (a^{(k+1)}b^{(k+1)} - a^{(k)}b^{(k)})/h = (\delta^+ a^{(k)})b^{(k+1)} + a^{(k)}(\delta^+ b^{(k)})$ を証明せず用いてよい．

(3) $(**)$ に解が存在すると仮定する．このとき，k に依存しないある定数 C' が存在して，$f(x^{(k)}) - f(x^*) \leq C'/k^2$ が $k = 1, 2, \ldots$ で成立することを示せ．

第 3 問

実数全体の集合を $\mathbb{R}$，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す．虚数単位を i，自然対数の底を e とおく．周期 2π の関数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対し，ノルム $\|g\|$ を

$$\|g\| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |g(\theta)|$$

と定める．正の整数 n に対し，

$$\mathcal{T}_n = \{t:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \mid \text{ある複素係数 } n \text{ 次多項式 } P \text{ により } t(\theta)=P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \text{ と表される}\}$$

を定める．

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を周期 2π の連続関数とし，各正の整数 n に対して

$$\|f-t_n\| \le \frac{c}{n^3}$$

を満たす $t_n\in\mathcal{T}_n$ が存在するとする．ただし，$c>0$ は n によらない定数である．以下の設問に答えよ．

(1) 各正の整数 n に対して，

$$\|t_{n+1}-t_n\| \le \frac{2c}{n^3}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $t\in\mathcal{T}_n$ の導関数を t' と書く．関数列 $\{t_n'\}$ が，ある周期 2π の連続関数 $s:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に $[0,2\pi]$ 上で一様収束することを示せ．ただし，以下の 2 つの事実を証明せずに用いてよい．

- $[0,2\pi]$ 上の複素数値連続関数全体の集合を $\mathrm{C}[0,2\pi]$ で表す．このとき，ノルム空間 $(\mathrm{C}[0,2\pi],\|\cdot\|)$ は完備である．
- 各正の整数 n と任意の $t\in\mathcal{T}_n$ に対して

$$\|t'\| \le n\|t\|$$

が成り立つ．

(3) f が $\mathbb{R}$ 上微分可能であることを示せ．

第 4 問

指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ とは，$\lambda > 0$ に対して確率密度関数

$$p(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$$

で定義される非負実数上の確率分布である．独立に $\mathrm{Exp}(\lambda)$ に従う確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $c > 0$ に対して，$X_1 \geq c$ という条件のもとでの $X_1 - c$ の条件付き確率密度関数を求めよ．

(2) $Y = \min(X_1, X_2)$, $Z = \max(X_1, X_2)$ とするとき，Y, $Z - Y$ それぞれの確率密度関数を求めよ．

(3) $X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度関数を求めよ．

(4) $a > 0$ に対して，$X_1 + \cdots + X_N \leq a < X_1 + \cdots + X_{N+1}$ によって定まる確率変数を N とする．$a < X_1$ のときは $N = 0$ とする．N に基づく λ の最尤推定量 $\widehat{\lambda}(N)$，および $\widehat{\lambda}(N)$ の期待値と分散を求めよ．

第 5 問

自然数（正の整数）全体の集合を $\mathbb{N}$ とする．いくつかの機械を利用して複数の仕事を処理するために，仕事の機械への割当を求める問題を考える．自然数 n, m に対して，$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ を仕事の集合，$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ を機械の集合とし，各仕事 $w_i \in W$ に対して，仕事 w_i の処理にかかる時間 $\ell_{w_i} \in \mathbb{N}$ および w_i を処理可能な機械の集合 $V_{w_i} \subseteq V$ が指定されているものとする．全ての $w_i \in W$ において，

$$\pi(w_i) \in V_{w_i}$$

を満たす写像 $\pi : W \to V$ を実行可能割当と呼ぶ．実行可能割当 π における機械 $v_j \in V$ の所要時間 $T(\pi, v_j)$ を

$$T(\pi, v_j) = \sum_{w_i \in \pi^{-1}(v_j)} \ell_{w_i}$$

と定め，π の所要時間 $T(\pi)$ を

$$T(\pi) = \max_{v_j \in V} T(\pi, v_j)$$

と定める．最小割当問題とは，所要時間最小の実行可能割当を求める問題である．以下の設問に答えよ．

(1) 全ての仕事の所要時間 ℓ_{w_i} が一様に等しいと仮定する．つまり，全ての $w_i, w_j \in W$ において $\ell_{w_i} = \ell_{w_j}$ であるとする．このとき最小割当問題に対する多項式時間アルゴリズムを与えよ．

(2) 最小割当問題に対する以下の貪欲アルゴリズムを考える．

```
(初期化:) π を空集合上の写像 π : ∅ → V とする．
for i = 1, 2, ..., n do
    argmin_{v_j ∈ V_{w_i}} T(π, v_j) 内の要素 v* を 1 つ任意に選択．
    π(w_i) = v* として，π を {w_1, ..., w_i} 上の写像へ拡張．
end for
π を出力．
```

全ての仕事 $w_i \in W$ において $V_{w_i} = V$ であると仮定する．貪欲アルゴリズムの出力を π_{ALG}，最適値を T^* としたとき，$T(\pi_{\mathrm{ALG}}) \leq 2T^*$ が成り立つことを示せ．