数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２６年８月１９日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第 1 問

一般に，ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の各成分を x_i $(i = 1, \ldots, n)$ と表し，ノルム $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ を $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ で定義する．また，$\boldsymbol{x}$ の転置を $\boldsymbol{x}^\top$ で表す．以下の設問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$（$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$）に対して，変数 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に関する線形計画問題

$$\text{(P1)} \quad \left| \begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}{\text{maximize}} & \boldsymbol{a}^\top(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{u} + \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{v} \leq 1, \\ & \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \right.$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{e}$ は全ての成分が 1 であるベクトル，$\boldsymbol{0}$ は全ての成分が 0 であるベクトルを表す．

(1-1) (P1) の最適解を $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*)$ とおくとき， $\boldsymbol{u}^*$ と $\boldsymbol{v}^*$ の各成分 u_i^*, v_i^* について，$u_i^* \cdot v_i^* = 0$ が成り立つことを示せ．

(1-2) (P1) の双対問題を記述せよ．

(1-3) (P1) の最適値が $\|\boldsymbol{a}\|_\infty$ になることを示せ．

(2) 正定値対称行列 $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の逆行列 Q^{-1} を用いた最適化問題

$$\text{(P2)} \quad \left| \begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{x}^\top Q^{-1} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \end{array} \right.$$

を考える．

(2-1) (P2) の最適解を示せ．

(2-2) 全ての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq C\sqrt{\boldsymbol{x}^\top Q^{-1} \boldsymbol{x}}$$

となる（$\boldsymbol{x}$ に依らない）最小の定数 C を求めよ．

第 2 問

y を目的変数とし，x と z を説明変数とする線形重回帰式

$$y = a + bx + cz,$$

x のみを説明変数とする線形単回帰式

$$y = \alpha + \beta x,$$

z のみを説明変数とする線形単回帰式

$$y = \delta + \theta z$$

を考える．標本分散がそれぞれ 1 に基準化された実数値データ x_i $(i = 1, \ldots, n)$, y_i $(i = 1, \ldots, n)$, z_i $(i = 1, \ldots, n)$ を用いて，各係数 $a, b, c, \alpha, \beta, \delta, \theta$ を最小二乗法で決める．ただし，$n \geq 4$ とする．

(1) 変数 x, y 間の標本相関係数を r_{xy}，変数 y, z 間の標本相関係数を r_{yz}，変数 x, z 間の標本相関係数を r_{xz} とする．このとき，r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} の組が満たすべき条件を記せ．

(2) 回帰係数 b, c, β, θ が

$$b = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{1 - {r_{xz}}^2}, \quad c = \frac{r_{yz} - r_{xz}r_{xy}}{1 - {r_{xz}}^2}, \quad \beta = r_{xy}, \quad \theta = r_{yz}$$

と書けることを示せ．ただし，標本相関係数はいずれも ± 1 ではないものとする．

(3) $b \cdot \beta < 0$ かつ $c \cdot \theta < 0$ となり得ないことを示せ．

(4) $b \cdot \beta < 0$ かつ $c \cdot \theta > 0$ となる r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} の数値例を一つ挙げ，それらが (1) の条件を満たすことを確認せよ．

(5) $b \cdot \beta < 0$ となる状況を，実際的な現象例を挙げて説明せよ．

第 3 問

時間 t の実数値関数 $x(t), y(t)$ に関する常微分方程式

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t) - y(t) - x(t)(x(t)^2 + y(t)^2) + \dfrac{x(t)y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = x(t) + y(t) - y(t)(x(t)^2 + y(t)^2) - \dfrac{x(t)^2}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \end{cases}$$

を考える．

(1) 常微分方程式 $(*)$ を，関係式

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

で定まる極座標系 (r, θ) を用いて表現せよ．

(2) (1) で導いた常微分方程式の解 $r(t), \theta(t)$ を求めよ．ここで，初期値を $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$ $(r_0 > 0,\ 0 \leq \theta_0 < 2\pi)$ とする．

(3) (2) で求めた解 $r(t), \theta(t)$ の概略を，横軸 t，縦軸 $r(t)$ の平面上，および横軸 t，縦軸 $\theta(t)$ の平面上に図示せよ．

(4) 式 $(*)$ の解軌道群の概略を，$t \to +\infty$ の挙動に注意して，横軸 $x(t)$，縦軸 $y(t)$ の状態空間上に図示せよ．

第 4 問

閉区間 $I = [0, 1]$ 上の連続写像 $f : I \to I$ を

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & (x \in I_1), \\ 2 - 2x & (x \in I_2) \end{cases}$$

で定める．ただし，$I_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ である．自然数 n と $1 \le k \le 2^n$ の範囲の自然数 k に対して，

$$I_k^n = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$$

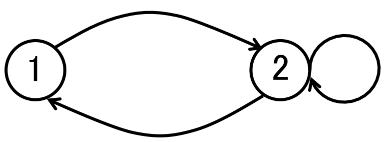
とする．自然数 p に対して，合成写像 f^p を

$$f^p(x) = f(f^{p-1}(x))$$

で定める．ただし，$f^0(x) = x$ とする．また，$f^p(x) = x$ となる $x \in I$ を周期 p の周期点と呼ぶことにする．

(1) 一般に，連続写像 $g : I \to I$ に対して，閉区間 $J \subseteq I$ が $g(J) \supseteq J$ を満たすとき，J には不動点 ($g(x) = x$ となる $x \in J$) が存在することを示せ．

(2) 次の有向グラフ上の長さ p の有向道 $P = (v_0, v_1, \ldots, v_p)$ を考える．



ただし，各 $i = 0, 1, \ldots, p$ に対して $v_i \in \{1, 2\}$ となる．有向道 P が終点 v_p 以外で頂点 2 を訪れる回数を m とする ($m := \#\{i \mid v_i = 2,\ 0 \le i < p\}$)．

(2-1) 全ての $i = 0, 1, \ldots, p$ に対して

$$f^i(I_k^{m+1}) \subseteq I_j \quad (j = v_i)$$

となり，特に $i = p$ に対しては

$$f^p(I_k^{m+1}) = I_j \quad (j = v_p)$$

となる k が $1 \le k \le 2^{m+1}$ の範囲で唯一つ存在することを示せ．このようにして決まる区間 I_k^{m+1} を J_P と書く．

(2-2) 有向道 P に対する J_P 上で f^p が一次関数であることを示せ．

(2-3) 有向道 P の始点と終点が同じ（$v_0 = v_p$）ならば，J_P の中に周期 p の周期点が唯一つ存在することを示せ．

(3) 周期 p の周期点の個数 $N(p)$ が，(2) の有向グラフの隣接行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いて，$N(p) = \mathrm{tr}\, A^p$ と書けることを示せ．ただし，$\mathrm{tr} A^p$ は A^p の対角成分の和を表す．

(4) $N(p)$ を具体的に求め，その増加率 $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \frac{\log N(p)}{p}$ を評価せよ．

第 5 問

集合 $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, \sigma\}$ の要素を値に持つ長さ n の配列 S を考え，S の第 i 番目の要素を $S[i]$ と書くことにする ($i = 1, 2, \ldots, n$)．配列 S に現れる異なる $\mathcal{A}$ の要素の数を k とする．各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，集合 D_i を

$$D_i = \{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j < i, S[j] = S[i]\}$$

で定め，$d(i)$ を

$$d(i) = \begin{cases} i - \max D_i & (D_i \neq \emptyset), \\ i & (D_i = \emptyset) \end{cases}$$

で定める．ただし，$\mathbb{N}$ は自然数全体，$\max D_i$ は D_i の要素の最大値を意味する．全ての $d(1), d(2), \ldots, d(n)$ を計算するアルゴリズムを考える．

計算モデルは RAM とする．配列 S の各要素は定数時間で読み込めるが，書き換えはできないとする．アルゴリズムの領域計算量には S の領域を含まないとする．各 $d(i)$ の値は一度出力すればよく，格納する必要は無い．

(1) 全ての $d(1), d(2), \ldots, d(n)$ を計算する $O(\sigma)$ 領域，$O(n + \sigma)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．

(2) 全ての $d(1), d(2), \ldots, d(n)$ を計算する $O(k)$ 領域，$O(n \log k)$ 時間のアルゴリズムの概要を述べよ．

(3) 全ての $d(1), d(2), \ldots, d(n)$ を $O(1)$ 領域で計算する次のアルゴリズムを考える．

> 各 i に対し，$S[i-1], S[i-2], \ldots$ を順に見て行き，初めて $S[j] = S[i]$ となる j が現れたときに $d(i) = i - j$ とする．ただし，$S[1]$ まで見てもそのような j が見つからなかったときは $d(i) = i$ とする．

このアルゴリズムの時間計算量が $O(nk)$ であることを示せ．

(4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log d(i) = O(n \log k)$ であることを示せ．