数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２５年８月２０日（火）　１０：００〜１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第 1 問

n 次の実対称三重対角行列 X を

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

で定義する．ただし，$b_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ とする．

(1) 実数 μ に対して，行列 $X - \mu I$ の k 次の首座小行列式（1 行目から k 行目と 1 列目から k 列目までで定まる部分行列の行列式）を $p_k(\mu)$ で表す $(k = 1, 2, \ldots, n)$．ただし，I は単位行列である．このとき，$p_{k-1}(\mu) = 0$ ならば $p_k(\mu)p_{k-2}(\mu) < 0$ が成り立つことを示せ $(k = 3, \ldots, n)$．

(2) X の固有値 λ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を，a_i, b_j, $p_k(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ のうちの必要なものを用いて表せ．ただし，$\boldsymbol{u}$ の第 1 成分 u_1 を 1 とせよ．

第 2 問

複素正方行列 A に対して，その指数関数を

$$\mathrm{e}^A := I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

で定義する．ただし，I は単位行列とする．

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 2\pi\mathrm{i} \end{bmatrix}$ に対して e^A を求めよ．ただし，a は実定数，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．

(2) A, B を複素正方行列とする．このとき，すべての実数 t に対して $\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$ が成立することの必要十分条件が $AB = BA$ であることを示せ．

(3) $AB \neq BA$ であっても $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$ が成立する複素正方行列 A, B の例を一組示せ．

(4) A を n 次実正方行列とする．関数 $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ に関する常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{y}(t) \qquad (*)$$

を考える．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．初期条件 $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{v}$ を満たす解が $\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{tA}\boldsymbol{v}$ により与えられることを示せ．

(5) 常微分方程式 $(*)$ の係数行列 A が，実行列 P, Q を用いて $A = P + Q$ と書けるとする．このとき，t 方向を刻み幅 $h\ (>0)$ で離散化し，

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{y}}((k+1)h) &= \mathrm{e}^{hP}\mathrm{e}^{hQ}\tilde{\boldsymbol{y}}(kh) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \\ \tilde{\boldsymbol{y}}(0) &= \boldsymbol{y}(0) \end{aligned}$$

を用いて $\boldsymbol{y}$ の近似解 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ を得ることを考える．いま，e^{hP}, e^{hQ} は厳密に計算できるとしたとき，この近似は h に関してどの程度の精度を持つか．時刻 $t = h$ における誤差 $\|\tilde{\boldsymbol{y}}(h) - \boldsymbol{y}(h)\|$ を評価することにより答えよ．ただし，$\|\cdot\|$ はノルムを表す．

第 3 問

ある池にいる魚の数を N とする．N の推定をするため，まず池の魚を $n\ (\leq N)$ 匹釣り，マークをしてから池に放す．十分な時間が経ってから，マークをした魚が $m\ (\leq n)$ 匹集まるまで魚を釣る．このときに釣れた魚のうち，マークが付いていない魚の数を X とする．ただし，N, n, m は 1 以上である．

(1) 等式

$$\binom{N}{n} = \sum_{k=m}^{N-n+m} \binom{k-1}{m-1}\binom{N-k}{n-m}$$

が成立することを示せ．

(2) 非負整数 x に対して，$X = x$ となる確率 $p(x; N, n, m)$ を求めよ．

(3) 期待値 $\mathrm{E}[X]$ を計算せよ．

(4) N の不偏推定量を構成せよ．

第 **4** 問

N (≥ 2) 種からなる集団を考える．時刻 t (≥ 0) において種 i が集団内で占める割合を $x_i(t)$ で表す $(i = 1, 2, \ldots, N)$．すなわち，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i(t) = 1$ が任意の時刻 $t \geq 0$ で成り立つ．各 $x_i(t)$ は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = x_i(t) \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j(t) - \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} A_{kj} x_k(t) x_j(t) \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (*)$$

に従うとする．ただし，各 A_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, N; j = 1, 2, \ldots, N)$ は実数とする．

(1) 全ての種が共存する平衡点 $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ が存在するとき，その平衡点において $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} A_{ij} p_j$ が i によらず全て等しいことを示せ．
ただし，$(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ が式 $(*)$ の平衡点であるとは，$x_i(t) = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ が式 $(*)$ の解であることをいう．また，平衡点 $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ において全ての種が共存するとは，全ての i について $p_i > 0$ であることをいう．

(2) 任意の実数 c_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ を用いて，各 A_{ij} を $A_{ij} + c_j$ に置き換えることを考える．この置き換えに対して，式 $(*)$ は不変であること（置き換えで得られた微分方程式が式 $(*)$ と等価であること）を示せ．

以下では，$N = 2$ として，$z(t) := x_1(t)$ と定義する．

(3) $A_{11} = A_{22} = 0$, $A_{12} = a$, $A_{21} = b$ のとき，$z(t)$ が満たす微分方程式を求めよ．また，初期値 $z(0)$ $(0 < z(0) < 1)$ に関わらず $\displaystyle\lim_{t \to \infty} z(t) = 1$ となるための a, b の条件を求めよ．

(4) 一般に，初期値 $z(0)$ $(0 < z(0) < 1)$ に関わらず $\displaystyle\lim_{t \to \infty} z(t) = 1$ となるための A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} の条件を求めよ．

(5) 初期値 $z(0)$ $(0 < z(0) < 1)$ に関わらず両種の共存状態が $t \to \infty$ で実現されるための A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} の条件を求めよ．

第 **5** 問

正整数 n (≥ 2) および整数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，n を法とする合同式

$$ax + by \equiv c \pmod{n}, \qquad bx - (a+b)y \equiv d \pmod{n}$$

を満たす整数 $x,\ y$ の組 (x, y) の集合を $L(a, b, c, d, n)$ と表す．

(1) $L(5, 3, 0, 0, 21)$ の要素 (x, y) で，$0 \leq x \leq 20$，$0 \leq y \leq 20$ の範囲にあるものをすべて求めて図示せよ．

(2) $L(5, 3, 3, 5, 21)$ が空集合かどうかを判定せよ．

(3) $(u, v) \in L(a, b, b, a, n)$ ならば

$$\begin{bmatrix} u & v \\ -v & u-v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a-b \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} b & a \\ a & -a-b \end{bmatrix} \pmod{n}$$

が成り立つことを示せ．ここで，行列の間の合同式は，各要素に関する合同式を意味する．

(4) $L(a, b, b, a, n)$ が空集合でないならば $L(a, b, 0, 0, n) = L(b, a, 0, 0, n)$ となることを示せ．