数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２４年８月２１日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第 1 問

$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n > 0$ を満たす実数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を用いて，n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \min\{\alpha_i, \alpha_j\}$$

と定義する．例えば，$n = 3$ のとき

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

である．

(1) 一般の n に対する A の行列式を求めよ．

(2) 一般の n に対して，A が正定値であることを示せ．

(3) $n = 4$ に対する A の逆行列を求めよ．

(4) 一般の n に対する A の逆行列を求めよ．

第 2 問

$N\ (\geq 2)$ 個の頂点をもつ連結な無向グラフ G 上での合意形成のモデルを考える．各頂点は黒または白の意見をもつものとする．すべての頂点が同じ意見をもつようになるまで，以下の (a)，(b)，(c) の操作を順に繰り返す．ただし，黒の「強さ」を $r\ (0 < r \neq 1)$，白の「強さ」を 1 とする．

(a) G の頂点を，各頂点の意見の強さに比例した確率で 1 つ選び，これを v とする．

(b) v の隣接点 v' を等確率で 1 つ選ぶ．

(c) v' の意見を v と同じ意見に変える．

(1) G を完全グラフ（図 2.1 は $N = 6$ の例）とする．初期状態において黒の意見をもつ頂点の個数が i であるとき，最終的にすべての頂点の意見が黒になる確率を x_i とする $(0 \leq i \leq N)$．$x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\ \ (1 \leq i \leq N-1)$ が満たす漸化式を求めよ．

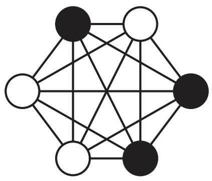


図 2.1.

(2) (1) で定義された $x_i\ (0 \leq i \leq N)$ を求めよ．

(3) G を星グラフとする．すなわち，ハブと呼ばれる 1 つの頂点が残りの $N-1$ 個の頂点と隣接し，ハブでない $N-1$ 個の頂点は，ハブとだけ隣接する（図 2.2 は $N = 6$ の例）．$N \geq 3$ とする．2 個の頂点が黒，$N-2$ 個の頂点が白の意見をもつ初期状態のうちで，最終的にすべての頂点の意見が黒になる確率が最大となるものを求めよ．

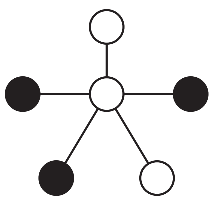


図 2.2.

第 3 問

複素平面上のある領域で正則な関数 $f(z)$ の実部を $u(z)$，虚部を $v(z)$ とする．すなわち，$f(z) = u(z) + \mathrm{i}\, v(z)$ である．z の実部を x，虚部を y とすると，$u(z)$, $v(z)$ はそれぞれ (x, y) の関数とみなせる．これを

$$u(z) = u(x + \mathrm{i}\, y) = u(x, y), \quad v(z) = v(x + \mathrm{i}\, y) = v(x, y)$$

のように書く．

(1) $u(x, y), v(x, y)$ が満たすコーシー・リーマンの関係式を書け．

(2) 次の $u(x, y)$ に対して，これを実部とする正則関数 $f(z)$ は存在するか．存在する場合には，それを求めよ．

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2$

(b) $u(x, y) = x^2 + y^2$

(c) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ 　 ($(x, y) \neq (0, 0)$ で考える)

(3) 関数 $f(z)$ は実軸と上半平面を含むある領域で正則，かつ，$0 \leq \arg z \leq \pi$, $|z| \to \infty$ のとき，一様に 0 に収束するとする．$y > 0$ のとき，次式が成立することを示せ：

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + y^2} f(\xi) \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} f(\xi) \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

（ヒント）図 3.1 の積分路 C 上で $f(\xi)\left(\dfrac{1}{\xi - z} \pm \dfrac{1}{\xi - \overline{z}}\right)$ の積分を考えよ．

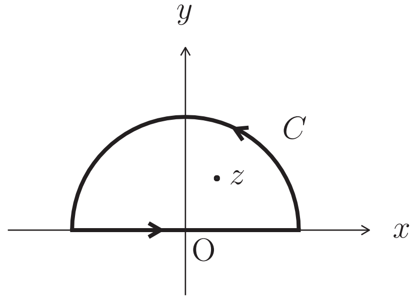


図 3.1. 積分路 C

(4) (3) の条件下で，$f(z)$ を $u(\xi, 0)$（u の実軸上の値）で表せ．

第 4 問

工学や物理学では，周期外力によって振動現象を示す非線形システムがよく見られる．その一例として，時間 t の実数値関数 $x(t)$ に関する 2 階の常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + (1-\epsilon)x(t) + \epsilon\, x(t)^3 = \epsilon A \cos t \qquad \cdots \quad (*1)$$

を考える．ただし，A と ϵ は正の定数とする．

(1) $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ と定義して，式 $(*1)$ を

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \cdots \quad (*2)$$

を用いて変換することにより，$u(t)$ と $v(t)$ に関する 1 階の連立微分方程式が得られる．得られた方程式は，t に関して周期 2π をもつ関数 $F(u, v, t)$, $G(u, v, t)$ を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) &= \epsilon F(u(t), v(t), t), \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) &= \epsilon G(u(t), v(t), t) \end{aligned}$$

と表すことができる．関数 $F(u, v, t)$ と $G(u, v, t)$ を求めよ．

(2) (1) の $F(u, v, t)$ と $G(u, v, t)$ を用いて定義される (u, v) の関数

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(u, v, \tau)\mathrm{d}\tau, \\ \tilde{G}(u, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(u, v, \tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

を求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 \tau \mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau \mathrm{d}\tau = \pi$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin \tau \cos \tau \mathrm{d}\tau = 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^4 \tau \mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi} \cos^4 \tau \mathrm{d}\tau = \frac{3\pi}{4}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3 \tau \cos \tau \mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi} \sin \tau \cos^3 \tau \mathrm{d}\tau = 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 \tau \cos^2 \tau \mathrm{d}\tau = \frac{\pi}{4}$ を用いてよい．

(3) 連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}(t) &= \epsilon\, \tilde{F}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)), \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}t}(t) &= \epsilon\, \tilde{G}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \end{aligned}$$

の定数解 $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = (u_0, v_0)$ に変換 $(*2)$ の逆変換を適用することにより得られる周期解 $\tilde{x}(t)$ を式 $(*1)$ の近似的周期解 [注] と呼ぶことにする．$A = \dfrac{1}{4}$ のとき，式 $(*1)$ の近似的周期解 $\tilde{x}(t)$ を全て求めよ．

注．この解は $(*1)$ の厳密解ではないが，ϵ が十分小さいときには振動現象を調べるための近似解として利用される（平均化法）．

第 5 問

連結な無向グラフ $G = (V, E)$ と正の枝重み w_e $(e \in E)$ が与えられたとき，枝重みの和が最小となる全域木を求める問題を考える．ただし，全域木とはすべての頂点を連結にする木である．これはネットワーク設計における基礎的な問題である．この問題を解くために以下の貪欲アルゴリズムを考える．ただし，$m = |E|$ とする．

貪欲アルゴリズム

Step 1. $T := \emptyset$;

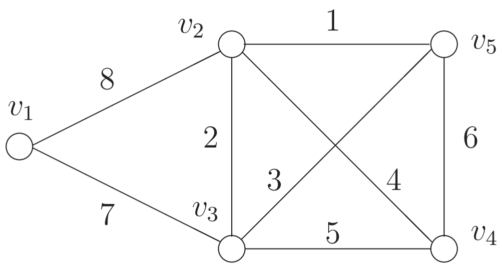
Step 2. $w_{e_1} \le w_{e_2} \le \cdots \le w_{e_m}$ となるように枝を $e_1, e_2, \ldots, e_m$ と並べる;

Step 3. **for** $i = 1, 2, \ldots, m$ **do**

　　if $T \cup \{e_i\}$ が閉路を含まない **then** $T := T \cup \{e_i\}$;

　end

Step 4. T を出力して停止する．



($V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ であり，各枝に付随する数字は枝重みを表す)

図 5.1. グラフ G と枝重みの例.

(1) 図 5.1 の枝重み付きグラフ G に貪欲アルゴリズムを適用したときの出力を示せ．

(2) $T\,(\subseteq E)$ を全域木，e を $e \notin T$ である枝とするとき，$T \cup \{e\}$ はちょうど一つだけ閉路を含む．この閉路を $C(T, e)$ と記す．全域木 T に対して，以下の (a) と (b) が等価であることを示せ．

(a) T は最小の枝重み和 $\displaystyle\sum_{e \in T} w_e$ をもつ全域木である．

(b) 任意の枝 $e \notin T$ と任意の枝 $e' \in C(T, e)$ に対して，$w_e \ge w_{e'}$ が成立する．

(3) 貪欲アルゴリズムは枝重みの和が最小である全域木を求める．(2) の結果を用いて，このことを証明せよ．

(4) 貪欲アルゴリズムの出力 T は，最大枝重み $\displaystyle\max_{e \in T} w_e$ を最小にする全域木でもある．このことを証明せよ．