数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２３年８月２３日（火）　１０：００〜１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第 1 問

A を n 次複素行列，σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を $+1$，-1 の 2 値をとる変数とし，σ_1，$\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ を並べた縦ベクトルを $\boldsymbol{\sigma}$ で表す：

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)^\top.$$

(1) $\displaystyle \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma_1=\pm1} \sum_{\sigma_2=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_n=\pm1} \boldsymbol{\sigma}^\top A \boldsymbol{\sigma}$ を求めよ．

(2) $n = 3$ とし，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，

$$\frac{1}{2^3} \sum_{\sigma_1=\pm1} \sum_{\sigma_2=\pm1} \sum_{\sigma_3=\pm1} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \boldsymbol{\sigma}^\top (zI - A)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}z$$

を求めよ．なお，$\displaystyle \oint_{|z|=1} \cdots \mathrm{d}z$ は複素平面上の単位円周を正の向きに 1 周する周回積分を表す．

(3) D を，複素平面内の区分的に滑らかな境界 ∂D をもつ有界な単連結領域とする．このとき，一般の n 次複素行列 A に対して

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\sigma_1=\pm1} \sum_{\sigma_2=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_n=\pm1} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \boldsymbol{\sigma}^\top (zI - A)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}z$$

を求めよ．ただし，∂D 上に A の固有値はないものとする．なお，$\displaystyle \oint_{\partial D} \cdots \mathrm{d}z$ は複素平面上の ∂D を正の向きに 1 周する周回積分を表す．

（注意）記号 $\displaystyle \sum_{\sigma_i=\pm1}$ は，$\sigma_i = +1$ と $\sigma_i = -1$ に関する和を表す．

記号 $^\top$ は，ベクトルの転置を表す．

第 2 問

回帰分析において，目的変数 y が p 個の説明変数 $x_1, \ldots, x_p$ の重み付き線形和に雑音 ε が加算された形であるモデル

$$y = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon$$

を設定する．ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)^\top$ は説明変数ベクトル，$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top$ は未知のパラメータベクトルを表し，雑音 ε の期待値は 0，分散は σ^2 であるとする．

説明変数ベクトルの n 個の値 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に対して，観測値 $y_1, \ldots, y_n$ が得られたとする．ただし，$y_1, \ldots, y_n$ に含まれる雑音 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ は，それぞれ ε と同じ分布に従い，互いに独立であるとする．

次の記号を定義する：

計画行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^\top$ （$n \times p$ 行列），
観測ベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$.

(1) 未知のパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ として，二乗誤差 $(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^\top(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})$ を最小にする $\boldsymbol{\beta}$ を用いることにする．$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求めよ．ただし，行列 X のランク（階数）は p に等しいとする．

(2) 同一の計画行列 X に対して $\boldsymbol{y}$ の観測を繰り返し行った場合の $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の期待値を求めよ．

(3) 上の (2) と同じ状況設定で，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の共分散行列を求めよ．

(4) 説明変数ベクトルの新たな値 $\boldsymbol{x}_{n+1}$ に対する目的変数の値 y_{n+1} を予測したいとする．(1) で求めた $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を用いた予測値 $\boldsymbol{x}_{n+1}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}$ の二乗誤差 $(y_{n+1} - \boldsymbol{x}_{n+1}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})^2$ の期待値を求めよ．

（注意）記号 $^\top$ は，行列またはベクトルの転置を表す.

第 3 問

ある広場にいる人の数（0 以上の整数）を変数 n で表す．時刻 $t \geq 0$ に広場にいる人の数が n である確率を $P(t,n)$ とし，十分小さい時間幅 $\Delta t > 0$ の間に新しく人が広場に到着する確率が $a\Delta t$ で，広場にいる各個人が広場を去る確率が $b\Delta t$ で与えられるとする．

以下の設問に答えよ．なお，本問では形式的な計算が許されるものとして計算を行えばよく，級数の収束や無限和と微分との順序交換，定常状態の存在などの議論は不要とする．

(1) $\Delta t \to 0$ の極限を考えることにより，$\dfrac{\mathrm{d}P(t,n)}{\mathrm{d}t}$ を，$P(t,n)$，$P(t,n+1)$，$P(t,n-1)$，a，b，t，n のうち必要なものを用いて表せ．ここで，時間幅 Δt の間に 2 人以上の人が到着あるいは退去する確率は無視できることに注意せよ．

(2) 時刻 t における n の平均値を $M(t)$ とする．$M(t)$ の満たす微分方程式を求め，$M(0) = \lambda$ の条件のもとで，その解を求めよ．

(3) $P(t,n)$ の確率母関数

$$G(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(t,n)$$

の満たす偏微分方程式を求め，その偏微分方程式の解のうちで時刻 t によらないもの（定常状態）$\overline{G}(s)$ を求めよ．

この定常状態 $\overline{G}(s)$ を用いた変換 $G(t,s) = H(t,s)\overline{G}(s)$ を活用することにより，$G(t,s)$ は

$$G(t,s) = K((s-1)\exp(-bt))\overline{G}(s) \qquad (*)$$

のように求められる．ただし，$K(x)$ は $K(0) = 1$ を満たす微分可能な関数である．

(4) $P(0,n)$ が平均 λ のポアソン分布

$$P(0,n) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

のとき，関数 $K(x)$ を定め，$P(t,n)$ を $M(t)$ と n で表せ．ただし，式 $(*)$ を用いてよい．

第 4 問

2 次関数 $f_0, f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top Q_i \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{p}_i^\top \boldsymbol{x} + r_i$$

で定義する．ただし，$Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ は実対称行列，$\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ は実ベクトル，$r_0, r_1, \ldots, r_m$ は実数である．

(1) $t_1, \ldots, t_m$ を実数として，条件

$$f_0(\boldsymbol{x}) \geq \sum_{i=1}^{m} t_i f_i(\boldsymbol{x}) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n) \tag{$*$}$$

を考える．条件 $(*)$ を満たす非負の $t_1, \ldots, t_m$ が存在するならば，$f_i(\boldsymbol{x}) \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $f_0(\boldsymbol{x}) \geq 0$ となることを示せ．

(2) 条件 $(*)$ が成り立つための必要十分条件は，行列

$$\begin{pmatrix} Q_0 & \boldsymbol{p}_0 \\ \boldsymbol{p}_0^\top & r_0 \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{m} t_i \begin{pmatrix} Q_i & \boldsymbol{p}_i \\ \boldsymbol{p}_i^\top & r_i \end{pmatrix}$$

が半正定値となることである．このことを示せ．

(3) 一般に，関数 $g_0, g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & g_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

を考える．$U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m)\}$ と定義すると，この問題の最適値は，最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & s \\ \text{subject to} & s - g_0(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in U) \end{array}$$

の最適値と等しいことを示せ．ただし，U が非空で最適値が存在する場合を考えればよい．

(4) 上の (1)，(2)，(3) の結果を用いることにより，最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & -3{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 2{x_2}^2 \\ \text{subject to} & 2{x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 \leq 4 \\ & {x_1}^2 \geq 1 \end{array}$$

の最適値の上界でなるべく小さいものを求めよ．

（注意）記号 $^\top$ は，ベクトルの転置を表す．

第 5 問

連結な無向グラフ $G=(V,E)$ を考える．ここで $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ は頂点集合，$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ は枝集合を表し，ループ（自己閉路）はないものとする．$n\times m$ 行列 $A=(a_{ij}\mid i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$ を

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{（頂点 } v_i \text{ が枝 } e_j \text{ の端点のとき）}\\ 0 & \text{（それ以外のとき）}\end{cases}$$

と定義する．

(1) G が n 個の頂点から成るサイクル（単純閉路）のとき，A の行列式の絶対値を求めよ．

(2) A のランク（階数）が m に等しいとき，G はどのようなグラフであるか．

次に，条件

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j=1 \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$
$$x_j\geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$$

を満たす $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ の全体の成す多面体 P を考える．P の点 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}$ に対応する枝集合を

$$E(\boldsymbol{x})=\{e_j\mid x_j>0\}$$

と表す．

(3) G が n 個の頂点から成るサイクル（単純閉路）のとき，P の端点 $\boldsymbol{x}$ をすべて求め，対応する枝集合 $E(\boldsymbol{x})$ とともに示せ．

(4) G が一般の場合に，P の端点 $\boldsymbol{x}$ に対応する枝集合 $E(\boldsymbol{x})$ がどのようになるかを述べよ．ただし，P は空でないと仮定する．

（注意）グラフのループ（自己閉路）とは，両端が同一の頂点である枝のことである．多面体 P の端点とは，P の点 $\boldsymbol{x}$ であって，どんな $\boldsymbol{y}\in P$，$\boldsymbol{z}\in P$，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{z}$ によっても $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})/2$ と表示できない点 $\boldsymbol{x}$ のことである．