数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２２年８月２４日（火）　１０：００〜１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第 1 問

A を n 次の実対称行列として，固有値問題

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

を考える．ここでは，固有値はすべて異なると仮定して，

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \qquad \cdots \qquad (*1)$$

とおき，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ とする．

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が正規直交系を成すように選べることを示せ．

以下，行列 A の各要素がパラメータ θ に依存して変化するとして，k 番目の固有値 λ_k と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_k$ の変化率を考える．ただし，考えている範囲のすべての θ に対して，A は実対称行列であって，仮定 $(*1)$ は満たされるものとする．$A = (A_{ij}(\theta) \mid i, j = 1, \ldots, n)$ の各要素 $A_{ij}(\theta)$ が θ に関して微分可能のとき，固有値は θ に関して微分可能であり，(正規直交系を成す）固有ベクトルの各要素が θ に関して微分可能であるように選べることが知られている．そこで，

$$\mu_k = \frac{\mathrm{d}\lambda_k}{\mathrm{d}\theta}, \qquad \boldsymbol{y}_k = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k}{\mathrm{d}\theta}$$

とおく．ただし，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k}{\mathrm{d}\theta}$ は $\boldsymbol{x}_k$ の各要素の θ に関する導関数を要素とするベクトルを表す．

(2) 線形方程式

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_k I & -\boldsymbol{x}_k \\ -\boldsymbol{x}_k^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_k \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{x}_k \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad (*2)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}$ は $\dfrac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}\theta}$ を (i, j) 要素とする n 次行列を表し，$\boldsymbol{x}_k^\top$ はベクトル $\boldsymbol{x}_k$ の転置を表す．

(3) 線形方程式 $(*2)$ の解は一意に定まることを示せ．

(4) $\mu_k = \boldsymbol{x}_k^\top \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}\boldsymbol{x}_k$ が成り立つことを示せ．

第 2 問

1 か 2 の二通りの値をとる T 個の確率変数 $z_1, z_2, \ldots, z_T$ を考える．これらの確率変数はマルコフ連鎖を成し，初期確率 $\pi_1 = \mathrm{P}(z_1 = 1)$, $\pi_2 = \mathrm{P}(z_1 = 2)$ と推移確率 $p_{ij} = \mathrm{P}(z_{t+1} = j \mid z_t = i)$ （$i, j = 1, 2;\ t = 1, \ldots, T-1$）によって同時確率（すなわちパス $(i_1, i_2, \ldots, i_T)$ の確率）が次の形に書けるとする:

$$\mathrm{P}(z_1 = i_1, z_2 = i_2, \ldots, z_T = i_T) = \pi_{i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \ldots p_{i_{T-1} i_T}.$$

ここで，$\pi_1 + \pi_2 = 1$, $p_{i1} + p_{i2} = 1$ $(i = 1, 2)$ である．初期確率 $\pi = \pi_1 = 1 - \pi_2$ および推移確率 $p = p_{12} = 1 - p_{11}$，$q = p_{21} = 1 - p_{22}$ の組 (π, p, q) を確率分布のパラメータという．

このマルコフ連鎖から n 回の独立な観測をおこなう．第 k 回目に観測されたパスを $(i_1^{(k)}, i_2^{(k)}, \ldots, i_T^{(k)})$ とする $(k = 1, \ldots, n)$．n 回の観測における，初期値 i の頻度を

$$x_i = (i_1^{(k)} = i \text{ となるパス } k \text{ の個数}), \quad i = 1, 2$$

とする．また状態 i から状態 j への総推移数を

$$y_{ij} = \left((i_t^{(k)}, i_{t+1}^{(k)}) = (i, j) \text{ となる } k \text{ と } t \text{ の組の個数 } (1 \leq k \leq n;\ 1 \leq t \leq T-1) \right), \qquad i, j = 1, 2$$

とする．

(1) n 本のパスの同時確率を $x_1, x_2, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ およびパラメータ π, p, q を用いて表せ．

(2) 観測された n 本のパスの確率 $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(z_1 = i_1^{(k)}, z_2 = i_2^{(k)}, \ldots, z_T = i_T^{(k)}; \pi, p, q)$ を最大にするパラメータ π, p, q の値（最尤推定値）を求めよ．

(3)
$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2)$$
を満たす (π_1, π_2) を定常分布という．定常分布を p, q を用いて表せ．ただし p, q は正とする．

(4) 初期確率が (3) で求めた定常分布 (π_1, π_2) であるとき，$x_1, x_2, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ の期待値を求めよ．

(5) 初期確率 (π_1, π_2) が (3) で求めた定常分布で，p, q の関数として $\pi_1 = \pi_1(p, q)$，$\pi_2 = \pi_2(p, q)$ のように表されているとする．このとき，n 本のパスの同時確率を $x_1, x_2, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ および p, q を用いて $L(p, q; x_1, x_2, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$ と表す．n を固定し $T \to \infty$ のとき

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{E}\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial p^2}\right) & \displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{E}\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial p \partial q}\right) \\ \displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{E}\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial p \partial q}\right) & \displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{E}\left(-\frac{\partial^2 \log L}{\partial q^2}\right) \end{pmatrix}$$

（すなわち (p, q) のフィッシャー情報行列の極限）を求めよ．ここで，E( ) は期待値を表す．

第 3 問

偏微分方程式の初期値問題

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -a\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (-\infty < x < +\infty,\ t > 0), \qquad \cdots \qquad (*1)$$
$$\phi(x,0) = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

を考える．ただし，x は空間変数，t は時間変数，$\phi = \phi(x,t)$ は未知の実数値関数であり，a は正の定数，$f(x)$ は周期が 1 の周期関数とする．ここでは，周期 1 の解（すなわち，任意の x と $t \geq 0$ に対して $\phi(x+1,t) = \phi(x,t)$ を満たす ϕ）を求めるための数値解法を考えよう．

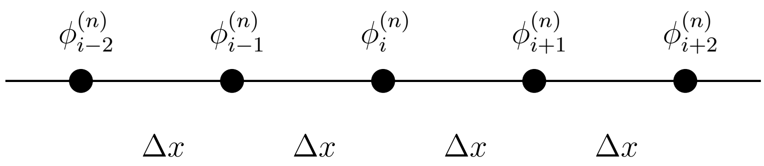

図 1

図 1 のように，区間 $[0,1)$ 上に N 個の格子点 $x_i = i\Delta x$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1;\ \Delta x = 1/N)$ をおき，時間を刻み幅 Δt で離散化して，差分スキーム

$$\frac{\phi_i^{(n+1)} - \phi_i^{(n)}}{\Delta t} = -a\left\{\mu\ \frac{\phi_{i+1}^{(n)} - \phi_i^{(n)}}{\Delta x} + (1-\mu)\ \frac{\phi_i^{(n)} - \phi_{i-1}^{(n)}}{\Delta x}\right\}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, N-1) \qquad \cdots \qquad (*2)$$

を考える（ただし，$\phi_N^{(n)} = \phi_0^{(n)}$, $\phi_{-1}^{(n)} = \phi_{N-1}^{(n)}$ とする）．ここで，$\phi_i^{(n)}$ は i 番目の格子点 $x_i = i\Delta x$ における時刻 $t_n = n\Delta t$ での ϕ の値の近似値を表しており，μ は実数値をとるパラメータである．式 $(*2)$ を用いて，時刻 t_n における近似値 $\phi_{i-1}^{(n)}$, $\phi_i^{(n)}$, $\phi_{i+1}^{(n)}$ から時刻 t_{n+1} における近似値 $\phi_i^{(n+1)}$ を計算することができる．

(1) 差分スキーム $(*2)$ の精度を評価するために，方程式 $(*1)$ を満たす関数 $\phi(x,t)$ に対して

$$\phi_{i-1}^{(n)} = \phi(x_{i-1}, t_n), \qquad \phi_i^{(n)} = \phi(x_i, t_n), \qquad \phi_{i+1}^{(n)} = \phi(x_{i+1}, t_n)$$

が成り立っているとして，式 $(*2)$ によって計算される $\phi_i^{(n+1)}$ を考える．Δx, Δt が十分小さいとき，$\dfrac{\phi_i^{(n+1)} - \phi(x_i, t_{n+1})}{\Delta t}$ の大きさが Δx, Δt のどのようなオーダーになるかを示せ．

(2) 差分スキーム $(*2)$ の安定性を解析するために，

$$\phi_i^{(n)} = V^{(n)} \exp(i\theta\sqrt{-1})$$

（ただし，$V^{(n)}$ は複素数，θ は実数）の形を仮定して式 $(*2)$ に代入すると，

$$V^{(n+1)} = G(\theta)V^{(n)}$$

の形の関係が得られる．ここで $G(\theta)$ は θ に依存する複素数で，増幅係数と呼ばれる．すべての実数 θ に対して $|G(\theta)| \leq 1$ が成り立つとき，差分スキーム $(*2)$ は（フォン・ノイマンの意味で）安定と呼ばれる．差分スキーム $(*2)$ の安定性を $\mu = 0$ と $\mu = 1/2$ の場合に調べよ．

第 4 問

多くの工学システムは連続性と離散性の両方の側面を有している．ここでは，時間 t に関してこの両方の側面を有する常微分方程式 [(注)]

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = a\,x(\lfloor t \rfloor) \qquad \cdots \quad (*)$$

を $t \geq 0$ の範囲で考える．ただし，$\lfloor t \rfloor$ は t を超えない最大の整数を表し，a と ω は正の定数である．初期条件を

$$x(0) = x_0, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = y_0$$

とする．

（注）詳しくは，t が整数に等しい点を除いて $(*)$ を満たし，$x(t)$ と $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ がすべての $t \geq 0$ において連続であるような実数値関数 $x(t)$ を考える．

(1) 整数 n (≥ 0) に対して，$x(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ の $t = n$ における値を x_n, y_n で表す．$n \leq t \leq n+1$ における解 $x(t)$ を x_n, y_n を用いて表せ．

(2) n に依らない 2 次行列 A によって

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と表せることを示し，この行列 A を求めよ．

(3) $\omega = \pi/3$ とする．任意の初期値 $(x_0,\, y_0)$ に対して $x(t)$ が $t \geq 0$ において有界に留まるための a に関する条件を求めよ．

第 5 問

$G = (V, E)$ を，点集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ と枝集合 $E = \{e_i = \{k_i, l_i\} \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ をもつ無向グラフとする．G の各点 $j \in V$ に非負のコスト c_j が与えられたとして，コストの和が最小である G の点被覆 W を求める問題（以下，最小コスト点被覆問題という）を考える．ただし，W が点被覆であるとは，W が V の部分集合であって，任意の枝 $\{k, l\} \in E$ に対して，$W \cap \{k, l\} \neq \emptyset$ が成り立つことである．

この問題を整数計画問題として定式化することを試みる．まず，A を G の接続行列を転置したものとする．すなわち，A は，各行が枝に，各列が点に対応した $m \times n$ 行列であり，その (i, j) 要素は，点 j が枝 e_i の端点であるとき 1，そうでなければ 0 である．また，$\mathbf{1}$ をすべての要素が 1 である m 次元列ベクトル，c を第 j 要素が c_j である n 次元列ベクトルとする．このとき，最小コスト点被覆問題は整数計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{(問題 IP)} \qquad & \min && c^\top x \\
& \text{subject to} && Ax \geq \mathbf{1} \\
& && x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \{0, 1\}^n
\end{aligned}
$$

として定式化できる．ただし，$^\top$ は転置を表す．また，この問題の緩和として線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{(問題 P)} \qquad & \min && c^\top x \\
& \text{subject to} && Ax \geq \mathbf{1} \\
& && x = (x_1, \dots, x_n)^\top \geq 0
\end{aligned}
$$

を考える．

(1) 問題 IP と問題 P は同じ最適値（目的関数の最小値）をもつとは限らない．そのことを示す問題例を作れ．

(2) 問題 P を解いて，その最適解 x から問題 IP の近似解 x^* を求めることを考える．いま，近似解 x^* を，$x_j \geq 1/2$ のとき $x_j^* = 1$，そうでなければ $x_j^* = 0$ と定めるものとする．このとき，ベクトル x^* が問題 IP の実行可能解であり，また，その目的関数値 $c^\top x^*$ が問題 IP の最適値の 2 倍以下であることを示せ．

(3) 問題 P の双対問題は，

$$
\begin{aligned}
\text{(問題 D)} \qquad & \max && \mathbf{1}^\top y \\
& \text{subject to} && A^\top y \leq c \\
& && y = (y_1, \dots, y_m)^\top \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．問題 P と問題 D の関係を示す弱双対定理を記し，それを証明せよ．

(4) 今度は，問題 P を解くことなく問題 IP の近似解を求めるために，次のアルゴリズムを考える．

Algorithm Primal-Dual

for $j = 1, \ldots, n$ **do** $x_j := 0$;

for $i = 1, \ldots, m$ **do** $y_i := 0$;

while x が問題 IP の実行可能解でない **do**

$x_{k_h} + x_{l_h} = 0$ である枝 $e_h = \{k_h, l_h\}$ $(1 \leq h \leq m)$ を任意に選ぶ;

$y_h := \min\{c_{k_h} - \sum_{i:i \neq h, \{k_i, l_i\} \ni k_h} y_i, \quad c_{l_h} - \sum_{i:i \neq h, \{k_i, l_i\} \ni l_h} y_i\}$;

if $y_h = c_{k_h} - \sum_{i:i \neq h, \{k_i, l_i\} \ni k_h} y_i$ **then** $x_{k_h} := 1$

else $x_{l_h} := 1$;

end{**while**}

このアルゴリズムによって得られた x が問題 IP の実行可能解であり，また，その目的関数値 $c^\top x$ が問題 IP の最適値の 2 倍以下であることを示せ．

（ヒント）まず，このアルゴリズムによって得られた y は問題 D の実行可能解であること，および，$x_j = 1$ である任意の j に対して，$c_j = \sum_{i:\{k_i, l_i\} \ni j} y_i$ となることを示すとよい．

(注) 上のアルゴリズムの記述において，$\sum_{i:i \neq h, \{k_i, l_i\} \ni k_h} y_i$ は，条件「$i \neq h$, $\{k_i, l_i\} \ni k_h$」を満たすすべての i に対する y_i の和を表す．$\sum_{i:i \neq h, \{k_i, l_i\} \ni l_h} y_i$ についても同様である．