数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２１年８月２５日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

第 1 問

(1) 正定値対称な実行列 A に対して，$A = B^2$ を満たす正定値対称な実行列 B が一意に存在することを示せ.

(2) 正則な実行列 F に対して，条件 $F = RU$ を満たす直交行列 R と正定値対称な実行列 U が一意に存在することを示せ.

(3) 正則な実行列 F に対して，条件 $F = RU = VR$ を満たす直交行列 R と正定値対称な実行列 U, V が一意に存在することを示せ.

第 2 問

ある工場で生産される製品は，確率 ε $(0 < \varepsilon < 1)$ で不良品である．生産された製品が良品であることを $X = 0$ で，不良品であることを $X = 1$ で表す.

以下の設問 (1)〜(3) に答えよ.

(1) 生産された製品を出荷する前に検査を行う．検査の結果，良品と判断されたとき $Y = 0$，不良品と判断されたとき $Y = 1$ とする．$X = 0$ のとき，確率 0.9 で $Y = 0$，確率 0.1 で $Y = 1$ となる．また，$X = 1$ のとき，確率 0.1 で $Y = 0$，確率 0.9 で $Y = 1$ となる．$Y = 0$ のとき製品を出荷し，$Y = 1$ のとき製品を廃棄する．工場から出荷された製品が不良品である確率 $\mathrm{P}(X = 1|Y = 0)$ を求めよ．

(2) 生産された製品を出荷する前に，(1) と同じ検査を n 回繰り返し行う．n 回の検査で不良品と判定された回数を Z_n とする．n 回の検査結果は互いに独立であるものとする．条件付確率 $\mathrm{P}(X = 1|Z_n = z_n)$ $(z_n = 0, 1, \ldots, n)$ が，良品と判定された回数 $n - z_n$ と不良品と判定された回数 z_n の差 $n - 2z_n$ および ε の関数となることを示せ.

(3) $q = \mathrm{P}(X = 1|Z_2 = 0)$, $r = \mathrm{P}(X = 1|Z_2 = 2)$ とおく．(1) と同じ検査を繰り返し行い，検査結果 $Z_n = z_n$ に基づく条件付確率 $\mathrm{P}(X = 1|Z_n = z_n)$ が， 初めて q 以下あるいは r 以上になったときに検査を終了する．製品が良品であったとき，検査終了までにかかる検査回数の期待値を求めよ．

第 3 問

(1) A を n 次元ユークリッド空間の有界集合とし，その体積 $v(A)$ は 1 より大きい ($v(A) > 1$) とする.[注 1] n 次元整数ベクトル $\boldsymbol{g}$ によって A を平行移動した集合

$$A + \boldsymbol{g} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g} \mid \boldsymbol{x} \in A\}$$

と集合

$$C = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n),\, 0 \leq x_i < 1 \ (i = 1, \ldots, n)\}$$

の交わり $(A + \boldsymbol{g}) \cap C$ を考える．このとき

$$\sum_{\boldsymbol{g} \in \mathbb{Z}^n} v\big((A + \boldsymbol{g}) \cap C\big) = v(A)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mathbb{Z}^n$ は n 次元整数ベクトルの全体を表す.

(2) 相異なる整数ベクトル $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ で，$(A + \boldsymbol{g}) \cap C$ と $(A + \boldsymbol{h}) \cap C$ の交わりが空でないものが存在することを示せ.

(3) A に含まれる相異なる 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ で，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n$ を満たすものが存在することを示せ.

(4) B を n 次元ユークリッド空間の原点対称な有界凸集合[注 2] とし，$v(B) > 2^n$ とする．このとき，$\frac{1}{2}B = \{\frac{1}{2}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in B\}$ を考えて (3) の結果を用いることにより，B が $\boldsymbol{0}$ でない整数ベクトルを含むことを示せ.

(5) $R = (r_{ij})$ を正則な 3 次実行列とし，その行列式を $\det R$ と表す．このとき，$\alpha > \sqrt[3]{3!|\det R|}$ を満たす任意の α に対して，$\boldsymbol{0}$ でない整数ベクトル $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{Z}^3$ が存在して，

$$\sum_{i=1}^{3} \Big|\sum_{j=1}^{3} r_{ij} g_j\Big| < \alpha$$

が成り立つことを示せ.

(注 1) 厳密には，A は有界な可測集合とし，$v(A)$ はその測度である.

(注 2) B が原点対称とは，$\boldsymbol{x} \in B$ ならば $-\boldsymbol{x} \in B$ であることをいう．B が凸とは，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B$ ならば，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ線分が B に含まれることをいう．とくに，B が凸ならば，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B$ に対して $\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \in B$ である．なお，有界凸集合は可測である.

第 4 問

水の入った 3 つのタンク 1, 2, 3 からなるシステム（図 1）を考える．

各タンクからは，それぞれ単位時間あたり r_1, r_2, r_3 の流量で常に水が流れ出ている．また，3 つのタンクのいずれか 1 つに対して，単位時間あたり $R = r_1 + r_2 + r_3$ の流量で常に水が供給されている．水の供給先は，いずれかのタンクが空になった瞬間に，空のタンクに切り替わるものとする．ただし，2 つのタンクが同時に空になった場合は，システムを停止するものとする．また，タンクから水が溢れることはない．

このとき，時刻 t における水の供給先を $q(t) \in \{1, 2, 3\}$ で表せば，時刻 t におけるタンク p 内の水の量 $w_p(t)$ は以下の微分方程式に従う．

$$\frac{\mathrm{d}w_p(t)}{\mathrm{d}t} = R\delta_{pq(t)} - r_p \qquad (p = 1, 2, 3)$$

ただし，δ はクロネッカーのデルタ（$p = q$ のとき $\delta_{pq} = 1$，$p \neq q$ のとき $\delta_{pq} = 0$）である．

以下，$r_1 = r_2 = r_3 = \dfrac{1}{3}$ であるとする．また，3 つのタンク内の水の総量 $w_1(t) + w_2(t) + w_3(t)$ は時刻 t によらず一定であるが，この総量は常に 1 であるとする．

(1) 時刻 0 以降，i 回目にいずれかのタンクが空になった時刻を t_i で表すこととする．ただし，時刻 t_i に 2 つのタンクが同時に空になりシステムを停止した場合は，以降 $t_i = t_{i+1} = t_{i+2} = \cdots$ と定義する．

ある時刻 t_i にタンク 1 が空になったとする．時刻 t_i におけるタンク 3 内の水の量を $\alpha = w_3(t_i)$ とおくとき，時刻 t_{i+1} における各タンク内の水の量 $w_1(t_{i+1}), w_2(t_{i+1}), w_3(t_{i+1})$ を α を用いて表せ．

(2) 時刻 t_i において，1 つ以上のタンクは空であるから，このときのシステムの状態を半開区間 $[0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$ 内の 1 点

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{w_3(t_i)}{3} & (w_1(t_i) = 0 \text{ かつ } w_2(t_i) \neq 0 \text{ のとき}), \\ \dfrac{w_1(t_i) + 1}{3} & (w_2(t_i) = 0 \text{ かつ } w_3(t_i) \neq 0 \text{ のとき}), \\ \dfrac{w_2(t_i) + 2}{3} & (w_3(t_i) = 0 \text{ かつ } w_1(t_i) \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で表すことができる．このとき，x_{i+1} は x_i から一意に定まり，$x_{i+1} = f(x_i)$ の形で書くことができる．この写像 $f\colon [0, 1) \to [0, 1)$ を求めよ．また，f のグラフを図示せよ．

(3) 任意の相異なる 2 点 $x,\ y \in [0,1)$ に対して，整数 $k \geq 0$ が存在して，

$$\left|f^k(y) - f^k(x)\right| \geq \frac{1}{4}$$

となることを示せ. ただし, $f^0(x) = x,\ f^k(x) = f(f^{k-1}(x))\ (k = 1,\ 2,\ \ldots)$ である.

［ヒント］まず，$|y - x| < \dfrac{1}{4}$ ならば $|f(y) - f(x)| \geq 2|y - x|$ であることを示すとよい.

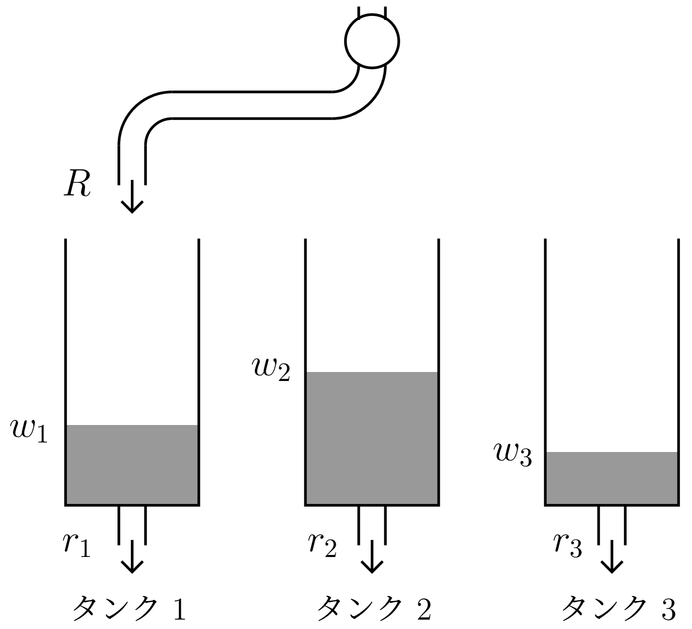

図 1

第 5 問

(1) $2n+1$ 個の正整数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, s_1, s_2, \ldots, s_n, S$ が与えられたとき，以下の最適化問題 P を動的計画法を用いて解くことを考える.

$$\text{(問題 P)} \qquad \max \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \leq S \qquad (*)$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (**)$$

上記の問題を解くために, $j = 1, \ldots, n$ と $s = 0, 1, \ldots, S$ に対して最適化問題

$$\max \quad \sum_{i=1}^{j} p_i x_i$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{j} s_i x_i = s$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad (i = 1, \ldots, j)$$

を考え，その最適値 (目的関数の最大値) を $A(j,s)$ とする．ただし，制約条件を満たす解が存在しないときには，$A(j,s) = -\infty$ とする．このとき，$A(0,0) = 0$, $A(0,s) = -\infty$ $(s \neq 0)$ とおき，$A(j,s)$ の漸化式

もし $s < s_j$ ならば $\quad A(j,s) = A(j-1,s),$

そうでなければ $\quad A(j,s) = \max\{A(j-1,s), p_j + A(j-1, s-s_j)\}$

$(j = 1, \ldots, n)$ を用いて，問題 P を解くことができる．$n = 5$, $S = 5$,

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 2, \quad p_4 = 1, \quad p_5 = 3,$$

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 2, \quad s_5 = 1$$

の問題例に対して上記の漸化式に基づく動的計画法を適用し，最適値を求めよ．ただし，答案には，最適値だけでなく，計算の途中に現れるすべての $A(j,s)$ の値も表にして記せ.

(2) (1) の漸化式に基づくアルゴリズムを与えよ．また，そのアルゴリズムの時間計算量を示し，それが入力長の多項式であるかどうかを述べよ.

(3) 問題 P の制約条件 $(**)$ を「$x_i \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ $(i = 1, \ldots, n)$」と変更した問題 Q を解きたいとする．(1) と同様の漸化式を示せ.

(4) 問題 P の制約条件に新たに「 $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W$ 」を付け加えた問題 R を解きたいとする．ただし，$w_1, \ldots, w_n, W$ は正整数である．(1) と同様の漸化式を示せ.