数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２０年８月２６日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

第 1 問

n 次複素行列 $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ に対して $r_i = \sum_{j \neq i, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ とおくとき，A の正則性を判定するための定理として次のものがある：

> 定理 I.
> $$|a_{ii}| > r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{$*$}$$
> ならば，A は正則である．

この定理の証明の一つは次のように背理法で与えられる．

(証明) A が正則でないとする．このとき，あるベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在して，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \text{すなわち} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つ．$|x_t| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ とおくと，上式の $i = t$ に対する式より，

$$a_{tt} x_t = - \sum_{j \neq t, 1 \leq j \leq n} a_{tj} x_j$$

であるから，

$$|a_{tt}||x_t| \leq \sum_{j \neq t, 1 \leq j \leq n} |a_{tj}||x_j| \leq (\sum_{j \neq t, 1 \leq j \leq n} |a_{tj}|)|x_t| = r_t |x_t|$$

が成り立つ．両辺を $|x_t|\,(\neq 0)$ で割って $|a_{tt}| \leq r_t$ となるが，これは仮定に反する．(証終)

(1) 定理 I の証明を参考にして，次の定理 II を証明せよ．

> 定理 II. $n \geq 2$ とする．
> $$|a_{ii}||a_{jj}| > r_i r_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{$**$}$$
> ならば，A は正則である．

[ヒント] 上記の $\boldsymbol{x}$ の成分のうち，絶対値が２番目に大きいもの x_s も考えよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，定理 II が定理 I より “真に強い” 定理であること，すなわち，次の (i)，(ii) が成り立つことを示せ：

(i) 行列 A が $(*)$ を満たせば，$(**)$ も満たす．

(ii) $(**)$ は満たすが，$(*)$ を満たさない行列 A がある．

第 2 問

複素数 z に対して，z の実部を $\mathrm{Re}(z)$ と表し，符号関数を

$$\mathrm{sign}(z) = \begin{cases} 1, & \mathrm{Re}(z) > 0 \\ -1, & \mathrm{Re}(z) < 0 \\ 0, & \mathrm{Re}(z) = 0 \end{cases}$$

と定義する．

(1) $z^2 - 1 = 0$ の根を求める Newton 法の反復式を示せ．ただし，初期値を z_0，反復解を $z_1, z_2, \ldots$ とせよ．また，この反復が $\mathrm{Re}(z_0) \neq 0$ を満たす任意の初期値 z_0 に対して破綻しないこと (反復式の分母が 0 にならず反復が進行すること) を示せ．

(2) 上の反復解 z_k を用いて，初期値 z_0 の関数 f_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を

$$f_k(z_0) = \frac{z_k - \mathrm{sign}(z_0)}{z_k + \mathrm{sign}(z_0)}$$

と定義する．ただし，$\mathrm{Re}(z_0) \neq 0$ とする．このとき，上式の分母が 0 にならないことを示し，さらに，

$$f_{k+1}(z_0) = \big(f_k(z_0)\big)^2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 上の結果を利用して，(1) の Newton 反復法が $\mathrm{Re}(z_0) \neq 0$ を満たす任意の初期値 z_0 に対して収束し，

$$\lim_{k \to \infty} z_k = \mathrm{sign}(z_0)$$

となることを示せ．

(4) n 次複素行列 Z_0 を初期値とする反復法

$$Z_{k+1} = \frac{Z_k + {Z_k}^{-1}}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

を考える．行列 Z_0 が対角化可能(注) で，虚軸上に固有値をもたないならば，反復は破綻せず，Z_k は収束することを示せ．

(注) ある正則行列 S に対して $S^{-1}Z_0S$ が対角行列となるとき，Z_0 は対角化可能であるという．

第 3 問

(1) n 次実行列 $Q = [q_{ij}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ が直交行列で，その 1 行目が $(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})$ であるとする．n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ に対し，

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = Q\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ q_{21} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

とおくとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=2}^{n} {y_i}^2$ が成立することを示せ．ただし，$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ である．

(2) 確率変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が，期待値 μ, 分散 σ^2 の正規分布に独立に従うとする．すなわち，その同時確率密度関数が

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right]$$

であるとする．このとき，$y_1, y_2, \ldots, y_n$ の同時確率密度関数を求めよ．

(3) 確率変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が，期待値 μ, 分散 σ^2 の正規分布に独立に従うとして，分散 σ^2 の推定量

$$\hat{\sigma}^2 = f(n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

を考える．ただし，$f(n)$ は n の関数である．$\hat{\sigma}^2$ が σ^2 の不偏推定量となる $f(n)$ を求めよ．

(4) 確率変数 x が期待値 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従うとき，期待値のまわりの 4 次のモーメント $\mathrm{E}[(x-\mu)^4]$ を求めよ．

(5) 確率変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が，期待値 μ, 分散 σ^2 の正規分布に独立に従うとする．分散 σ^2 の推定量

$$\hat{\sigma}^2 = g(n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

の平均 2 乗誤差 $\mathrm{E}[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2]$ が最も小さくなる $g(n)$ を求めよ．ただし，$g(n)$ は n の関数である．

第 4 問

カオスなどの非線形力学系の研究に広く使われているロジスティック写像 f は，閉区間 $I=[0,1]$ から I への写像で，

$$f(x)=ax(1-x) \qquad (x\in I)$$

で定義される．ここで，a は $0<a\leq 4$ を満たすパラメータである．初期値を $x_0\in I$ とし，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\dots)$ とおく．

以下，$a=4$ として，$x_0,x_1,x_2,\dots,x_{N-1}$ の I 上の分布を考える．この分布は，ほとんどすべての x_0 に対して，$N\to\infty$ で同一の極限分布をもち，その極限分布は，開区間 $(0,1)$ 上で連続な密度関数 $p(x)$ によって記述され，

$$\int_{[0,x]} p(u)\mathrm{d}u=\int_{f^{-1}([0,x])} p(u)\mathrm{d}u \qquad (x\in I) \tag{$*$}$$

が成り立つことが知られている．ここで，$f^{-1}([0,x])=\{u\in I : f(u)\in[0,x]\}$ であり，$\int_I p(x)\mathrm{d}x=1$ とする．この密度関数 $p(x)$ を求めよう．

(1) I から I への写像 h,g を

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x} && (x\in I),\\ g(y) &= 1-2\left|y-\frac{1}{2}\right| && (y\in I) \end{aligned}$$

と定義するとき，$g\big(h(x)\big)=h\big(f(x)\big)$ $(x\in I)$ が成り立つことを示せ．さらに，変数変換 $y_n=h(x_n)$ $(n=0,1,2,\dots)$ によって，$x_{n+1}=f(x_n)$ が $y_{n+1}=g(y_n)$ に書き換えられることを示せ．なお，g はテント写像と呼ばれる．

(2) I 上の一様分布の密度関数 $q(y)=1$ $(y\in I)$ がテント写像 g に関して

$$\int_{[0,y]} q(v)\mathrm{d}v=\int_{g^{-1}([0,y])} q(v)\mathrm{d}v \qquad (y\in I) \tag{$**$}$$

を満たすことを示せ．ここで，$g^{-1}([0,y])=\{v\in I : g(v)\in[0,y]\}$ である．

(3) 式 $(**)$ において $y=h(x)$，$v=h(u)$ と変数変換した式を導出せよ．さらに，その式と式 $(*)$ を比較し，(2) の結果を利用することによって，$p(x)$ を求めよ．なお，$p(x)$ の一意性に関する考察は不要である．

第 5 問

$G = (V, E)$ を有限の点集合 V と辺集合 $E\,(\subseteq V \times V)$ をもつ有向グラフとする．各辺 $(u, v) \in E$ には，辺長を表す実数 $\ell(u, v)$ が与えられているとする．G のパス P とは，$(v^{(0)}, v^{(1)}), (v^{(1)}, v^{(2)}), \ldots, (v^{(k-1)}, v^{(k)})$ の形をした辺の列であり，$u = v^{(0)}$, $v = v^{(k)}$ のとき，P を u から v へのパスと呼ぶ．ここで，パス上には同じ辺や点が何度現れてもよいとする．パス P の長さをそこに現れる辺の長さの和と定義する．

本問では，与えられた始点 $s \in V$ から各点 $v \in V$ への最短パス (長さが最小のパス) を求める問題に対して，次の手続き ShortestPath を考える．ただし，グラフ G には s から各点 $v \in V$ へのパスが存在すると仮定する．手続き中で用いられる変数 $d(v)$ $(v \in V)$ の値は，実数または “$+\infty$” であり，$p(v)$ $(v \in V)$ の値は，V の要素または (V に属さない特別な記号)“**nil**” とする．

<u>Procedure ShortestPath</u>

Step 1. **for** each $v \in V$ **do**
  $p(v) :=$ **nil**
  if $v = s$ **then** $d(v) := 0$
  else $d(v) := +\infty$;

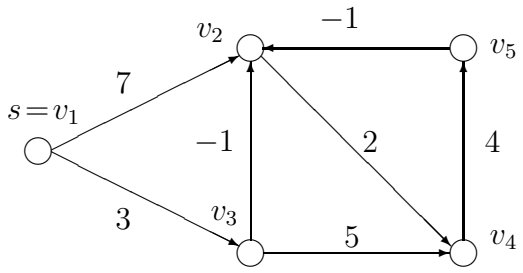
Step 2. **while** 最初の反復，あるいは，直前の反復で d が更新された **do**
  for each $(u, v) \in E$ **do**
    if $d(u) < +\infty$ かつ $d(v) > d(u) + \ell(u, v)$
    then $d(v) := d(u) + \ell(u, v)$, $p(v) := u$.

(1) 手続き ShortestPath を図 1 の例 1 に適用する．ただし，Step 2 の **for** 文では，辺 (u, v) を (v_5, v_2), (v_4, v_5), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_3) の順に選ぶものとする．

(1-1) 手続きが停止するかしないかを述べよ．また，停止するときには，s からそれぞれの点への最短パスを示せ．

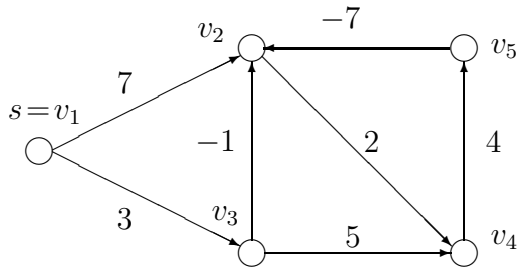
(1-2) Step 2 の各反復後に d, p の値がどのようになるか，手続きが停止する場合には停止するまで，手続きが停止しない場合には第 6 反復後まで記せ (答案用紙に次のような表を書け)．

	$d(v_1)$	$d(v_2)$	$d(v_3)$	$d(v_4)$	$d(v_5)$	$p(v_1)$	$p(v_2)$	$p(v_3)$	$p(v_4)$	$p(v_5)$
反復前	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**nil**	**nil**	**nil**	**nil**	**nil**
第 1 反復後										
第 2 反復後										
第 3 反復後										
⋮										



(各辺に付随する数字は辺長を表す)

図 1. グラフ G と辺長 ℓ の例 1.



(各辺に付随する数字は辺長を表す)

図 2. グラフ G と辺長 ℓ の例 2.

(2) 手続き ShortestPath を図 2 の例 2 に適用する．ただし，Step 2 の **for** 文では，(1) と同様に，辺 (u, v) を (v_5, v_2), (v_4, v_5), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_3) の順に選ぶものとする．

(2-1) 手続きが停止するかしないかを述べよ．また，停止するときには，s からそれぞれの点への最短パスを示せ．

(2-2) Step 2 の各反復後に d, p の値がどのようになるか，手続きが停止する場合には停止するまで，手続きが停止しない場合には第 6 反復後まで記せ．

(3) (1) と (2) の結果から，手続き ShortestPath は必ずしも停止しないことが分かる．どのような場合に停止しないのか，グラフ G の閉路 (始点と終点が同じであるパス) に着目して述べよ．

(4) $|V|$ 個の変数 x_v $(v \in V)$ に関する線形不等式系

$$x_v - x_u \leq \ell(u, v) \qquad ((u, v) \in E)$$

を考える．この不等式系が実行可能解をもつための必要十分条件を，手続き ShortestPath の停止性の観点から述べ，証明せよ．証明には (3) の結果を用いてよい．