数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成１９年８月２１日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること.

(3) 答案用紙３枚が渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること.
止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい.

(4) 答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること.

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする.

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること.

第1問

Aをn次正方行列, bをn次元ベクトルとする．自然数kに対して，$\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{k-1}b\}$の張る部分空間を$W_k = W_k(A, b)$と表し，$W_k$の次元を$d_k$とする．なお，行列やベクトルの成分は複素数とする．

(1) $W_k \subseteq W_{k+1}$であることを示せ.

(2) $W_k = W_{k+1}$ならば$W_{k+1} = W_{k+2}$であることを示せ.

(3) 不等式

$$d_{k+1} - d_k \geq d_{k+2} - d_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

が成り立つことを示せ.

(4) 任意の複素数λに対して$W_k(A - \lambda I, b) = W_k(A, b)$が成り立つことを証明せよ．ここで，$I$は$n$次単位行列を表す.

(5) $n = 3$で,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

とする．$d_3 = 3$となるためにα, b_1, b_2, b_3が満たすべき条件（必要十分条件）を求めよ.

(6) $n = 5$で,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

とする．$d_5 = 5$となるためにα, β, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5が満たすべき条件（必要十分条件）を求めよ.

第 2 問

3つの生物種 P, Q, R からなる生態系において，P は Q を，Q は R を，R は P を捕食する関係にあるものとする．このような生態系における各生物種の個体数の時間変化を記述する数理モデルとして，以下の微分方程式（巡回型 Lotka-Volterra 方程式）が知られている．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t)(q(t)-r(t)) \\ q(t)(r(t)-p(t)) \\ r(t)(p(t)-q(t)) \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

ただし，$p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ は，それぞれ時刻 $t \geq 0$ における生物種 P, Q, R の個体数の割合を実数で表したものである．

時刻 $t=0$ における初期値が与えられているとき，微分方程式 $(*)$ の解を考える．ただし，初期値 $p(0)$, $q(0)$, $r(0)$ は全て正であり，$p(0)+q(0)+r(0)=1$ を満たしているものとする．

(1) 任意の $t > 0$ に対して $p(t)+q(t)+r(t) = 1$ が成り立つことを示せ．また，$I(p,q,r) = pqr$ とおくとき，$I(p(t),q(t),r(t))$ の値は t によらず一定であることを示し，任意の $t>0$ において $0<p(t)<1$, $0<q(t)<1$, $0<r(t)<1$ であることを示せ．

(2) 時刻 t において生物種 P の割合 $p(t)$ が増加するためには，どのような領域に $(p(t),q(t))$ がなければならないか，横軸 $p(t)$，縦軸 $q(t)$ の 2 次元平面上に図示せよ．同様に，時刻 t において生物種 Q の割合 $q(t)$ が増加するためには，どのような領域に $(p(t),q(t))$ がなければならないか図示せよ．

(3) 微分方程式 $(*)$ の定常解（不動点）を求めよ．また，初期値が不動点でないとき，$(p(t),q(t))$ は時間の経過とともに，$\{(p,q) : I(p,q,1-p-q) = \text{定数}\}$ の形で定まる閉曲線上を周期運動する．この閉曲線の概形を図示し，$(p(t),q(t))$ が時間の経過とともに閉曲線上をどのような向きで動くか，矢印を用いて表せ．

今度は，微分方程式 $(*)$ を Euler 法で

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} p_{n+1}-p_n \\ q_{n+1}-q_n \\ r_{n+1}-r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n(q_n-r_n) \\ q_n(r_n-p_n) \\ r_n(p_n-q_n) \end{pmatrix}$$

と離散化し，近似的に解くことを考える．ただし，$h>0$ は時間の刻み幅である．また，p_n, q_n, r_n $(n=0,1,2,\ldots)$ はそれぞれ $p(nh)$, $q(nh)$, $r(nh)$ の近似であり，$p_0=p(0)$, $q_0=q(0)$, $r_0=r(0)$ である．

(4) 刻み幅 h を十分小さくとれば，いかなる初期値に対しても，$0 < p_n < 1, 0 < q_n < 1,$ $0 < r_n < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となることを示せ．

(5) 初期値が $(*)$ の定常解ではないと仮定する．刻み幅 h を十分小さくとれば，$I_n = I(p_n, q_n, r_n)$ は n に関して狭義単調減少となることを示せ．また，このとき (p, q) 平面内における近似解の軌道 $\{(p_n, q_n) : n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ の概略を図示せよ．

第 3 問

可算状態集合 S に値をとり，状態推移確率が時間に依存しない離散時間のマルコフ連鎖 $\{X(n) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ を考える．n ステップで状態 $j \in S$ から状態 $k \in S$ に推移する確率を $Q^{(n)}(j, k)$ とする．すなわち，

$$Q^{(n)}(j, k) = \mathrm{P}(X(n) = k \mid X(0) = j).$$

また，$X(0) = j$ から出発して $n\ (\geq 1)$ ステップで初めて k に到達する確率を $f^{(n)}(j, k)$ とおく．ただし，$f^{(0)}(j, k) = 0\ (\forall j, \forall k)$ と定義する．さらに $Q^{(n)}(j, k)$ と $f^{(n)}(j, k)$ の母関数を

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{jk}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(j, k) z^n, \\ \overline{f}_{jk}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(j, k) z^n \end{aligned}$$

で定義する．

(1)

$$\overline{Q}_{jk}(z) = \delta_{jk} + \overline{f}_{jk}(z)\overline{Q}_{kk}(z) \quad (\forall j, \forall k \in S)$$

を示せ．ただし，δ_{jk} は $j = k$ のときに 1，それ以外のときに 0 である．

(2) 状態 j から出発して j に初めて戻る時間を T_j とする：

$$T_j = \min\{n \geq 1 : X(n) = j, X(0) = j\}.$$

（ただし，j に戻らないときは $T_j = \infty$ とする.）状態 j は，T_j が有限となる確率が 1 であるとき，再帰的であるという．状態 j が再帰的であるときに，$\overline{f}_{jj}(1)$ の値を求めよ．

(3) 条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(j, j) = \infty$$

は，状態 j が再帰的であるための必要十分条件であることを示せ.

(4) マルコフ連鎖 $\{X(n) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ として，

$$S = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}, \quad Q^{(1)}(j, k) = \begin{cases} p & (k = j + 1) \\ 1 - p & (k = j - 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定義される1次元ランダム・ウォークを考える．このとき，$\overline{Q}_{00}(z), \overline{Q}_{10}(z), \overline{f}_{10}(z)$ を求めよ．ただし，

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(-\frac{t}{4}\right)^i$$

を用いてよい．

(5) 各頂点が d 個 $(d \geq 3)$ の隣接点をもち，任意の2頂点を結ぶ道が一つだけあるような無限グラフ（木グラフ）の頂点の上のランダム・ウォークを考える．ただし，各時刻ごとに独立に，現地点のいずれかの隣接点にそれぞれ確率 $1/d$ で移動すると仮定する．時刻 0 の出発点から時刻 n の現地点までの，枝数で測った距離を $X(n)$ とすると，$\{X(n) : n = 0, 1, \ldots\}$ も $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ を状態集合とするマルコフ連鎖となる．例えば，必ず $X(1) = 1$ である．時刻 $n = 1$ 以降初めて出発点に到達するまでは，適切な p に対して，$\{X(n) : n = 0, 1, \ldots\}$ を，(4) で与えられたランダム・ウォークと見なせる．このような p を d を用いて表せ．

(6) (5) の $\{X(n) : n = 0, 1, \ldots\}$ について，$\overline{f}_{00}(z)$ を求め，状態 $0 \in S$ が再帰的でないことを示せ．

第 4 問

視点 O から 2 つの点 P, Q へのばした半直線 OP, OQ のなす角を，O における P と Q の臨み角という．よく晴れた夜の時刻 t_1 に，日本のある場所に立って空を見上げたら，遠くの山の頂の点 P と同じ位置に，1 つの明るい星 A と人工衛星 B とが重なって見えた．そして，その視点における北極星と P の臨み角は α であった．同じ夜のそれから時間間隔 t_2 だけ経過した時刻 $t_1 + t_2$ に同じ場所からもう一度空を見上げたら，星 A と山の頂 P の臨み角は β で，一方，人工衛星 B は地球をほぼ一周したあと，山の頂 P と同じ位置に見えた．さらに時間間隔 t_2 経過した同じ夜の時刻 $t_1 + 2t_2$ でも，人工衛星 B は山の頂 P と同じ位置に見えた．地球の自転速度は 1 日にちょうど 1 回転で，北極星は地球の自転軸上にあるとする．人工衛星 B は，地球の中心に対して固定された大円軌道を等速で移動しているものとする．ただし，この大円軌道面の法線と地球の自転軸のなす角度を θ とし，人工衛星 B の地球の中心に対する回転角速度を ω とする．

(1) 経過時間 t_2 を求めよ．

(2) 人工衛星 B の大円軌道に関して，考え得る (θ, ω) を求めよ．

第 5 問

$G = (V^+ \cup V^-, E)$ を有限の点集合 $V^+ \cup V^-$ (ただし，V^+ と V^- は，互いに素) と枝集合 $E \subseteq \{\{u, v\} : u \in V^+, v \in V^-\}$ をもつ無向 2 部グラフとする．すなわち，G は，V^+ 中の点と V^- 中の点を結ぶ枝のみから成る無向グラフである．端点を共有しない枝の部分集合 $M \subseteq E$ を G のマッチングとよぶ．すなわち，$M = \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \ldots, \{u_k, v_k\}\} \subseteq E$ が G のマッチングであるとは，任意の i, j $(i \neq j)$ に対して $\{u_i, v_i\} \cap \{u_j, v_j\} = \emptyset$ を満たすことである．本問では最大マッチング (要素数が最大であるマッチング) を求めるアルゴリズムを考える．

(1) 以下に示す単純な貪欲アルゴリズムは，必ずしも最大マッチングを与えない．このことを例を挙げて示せ．ただし，$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする．

Step 1. $M := \emptyset$.

Step 2. **for** $i = 1$ **to** m **do**

if $M \cup \{e_i\}$ がマッチング **then** $M := M \cup \{e_i\}$.

Step 3. M を出力し，停止する．

(2) M_1, M_2 を G の 2 つのマッチングとする．M_1 と M_2 の対称差 $M_1 \Delta M_2$ を枝集合とする G の部分グラフ $G' = (V^+ \cup V^-, M_1 \Delta M_2)$ は，どのような性質をもつか示せ．ただし，対称差 $M_1 \Delta M_2$ とは，M_1 か M_2 どちらか一方に属する枝から成る集合，すなわち，$M_1 \Delta M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ である．

(3) M_1 を G のマッチング，M_2 を G の最大マッチングとする．このとき，(2) で定義された G' を用いて，M_1 が最大であるための必要十分条件を示せ．(説明も与えること．)

(4) G のマッチング M_1 に属する枝を V^- 側から V^+ 側へ，M_1 に属さない枝を V^+ 側から V^- 側に向き付けしてできた有向グラフを $\vec{G}$ とする．この $\vec{G}$ を用い，M_1 が最大マッチングであるための必要十分条件を示せ．((3) の結果を利用せよ．また説明も与えること．)

(5) (4) の結果を利用して，最大マッチングを求めるアルゴリズム，ならびに，その時間計算量を与えよ．