

数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成18年8月22日（火） 10:00～13:00

5問出題, 3問解答

注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
- (2) 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合には申し出ること。
- (3) 答案用紙3枚が渡されるから、1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
- (4) 答案用紙上方の指定された箇所に、その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
- (5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
- (6) 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
- (7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

n 次実対称行列 $A = (a_{ij})$ について、 A の最大固有値を λ 、全要素和を S と表し（すなわち、 $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ ）、不等式

$$\lambda \geq \frac{1}{n}S \quad (*)$$

を考察する。以下の設問 (1)–(3) に答えよ。

- (1) すべての要素が 1 であるベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ が λ に対応する固有ベクトルであるならば

$$\lambda = \frac{1}{n}S$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) $n = 2$ の場合に不等式 (*) が成り立つことを証明せよ。
 (3) 一般の n に対して不等式 (*) は成り立つか。成り立つのであれば証明を与えよ。成り立つとは限らないのであれば反例を示せ。

第2問

以下の設問 (1)–(3) に答えよ.

(1) X は x_1, x_2, \dots, x_K のいずれかの値をとる確率変数, Y は y_1, y_2, \dots, y_L のいずれかの値をとる確率変数とする.

(1-1) このとき, 確率 $P(Y = y_j)$ を 確率 $P(X = x_i)$ および条件付確率

$P(Y = y_j | X = x_i)$ を用いて表せ. ただし, $i = 1, 2, \dots, K$ および $j = 1, 2, \dots, L$ である.

(1-2) 期待値 $E[Y]$ は条件付期待値 $E[Y|X]$ を用いて $E[E[Y|X]]$ と表わされることを示せ. さらに, 分散 $V[Y]$ を 条件付分散 $V[Y|X]$ と $E[Y|X]$ を用いて表せ.

(2) 3枚のコイン A, B, C がある. コイン A, B, C の表が出る確率をそれぞれ p, q, r とする. このとき, 次の試行を考える.

第1段階: コイン C を投げる.

第2段階: 第1段階で表が出ればコイン A を N 回投げ, 裏が出ればコイン B を N 回投げる.

第2段階において, コインの表が出る回数を Y とする. このとき, 期待値 $E[Y]$ と分散 $V[Y]$ を求めよ.

(3) ある店の客の到来は, 雨でない日は, 単位時間当たりの到着数の期待値 λ_0 のポアソン過程であり, 雨の日は, 単位時間当たりの到着数の期待値 λ_1 のポアソン過程である. ただし, $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$ とする. また, 雨の日である確率を r とする. このとき, 単位時間当たりに到来する客の数 Y の期待値 $E[Y]$ と分散 $V[Y]$ を求めよ. さらに $V[Y]$ が最大となるときの確率 r を求めよ.

第3問

$$\varphi(z) = e^{-z^2}$$

とする. 以下の設問 (1)–(3) に答えよ.

- (1) 実数 $s (\neq 0)$ に対して, 図1のような z 平面上の積分路 C に沿う周回積分 $\int_C \varphi(z) dz$ を考え, $R \rightarrow \infty$ とすることによって, $\varphi(x)$ の Fourier 変換

$$\widehat{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-isx} dx$$

を求めよ. ただし, $\widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \sqrt{\pi}$ は既知とする.

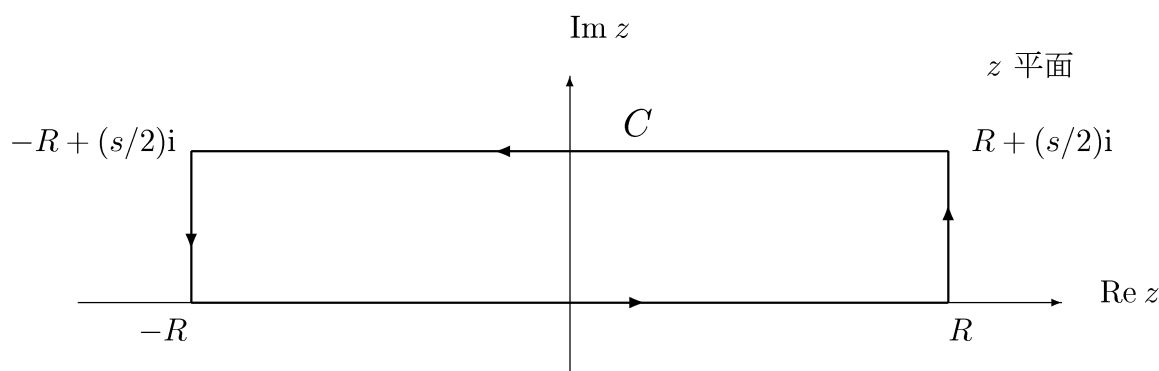


図1. 積分路 C

- (2) 正の実数 h に対して, $\varphi(x)$ から作られる級数

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(x + mh)$$

は絶対収束し, 周期 h の周期関数となる. 等式 $e^{-i(2\pi n/h)(x+mh)} = e^{-i(2\pi n/h)x}$ (m, n は整数) に注意して, 周期関数 $F(x)$ の Fourier 係数

$$c_n = \frac{1}{h} \int_0^h F(x) e^{-i(2\pi n/h)x} dx$$

を求めよ.

- (3) 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$ を矩形則 $h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(mh)$ で近似することを考える. h が十分小さいとき, 近似誤差に関して,

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(mh) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \asymp 2\sqrt{\pi} e^{-\pi^2/h^2}$$

が成り立つことを示せ.

第4問

m 本の部材 (棒材) をピンで組み合わせて構成される構造物をトラスという. 以下では, 簡単のために, トラスの振舞いを2次元平面内に限定して考える. 図1は, 10本の部材からなるトラスの例である. 以下では, できるだけ強いトラスを設計する最適化問題を考える. ただし, トラスの変形は微小であることを仮定する.

部材の断面積を a_i とおき, a_1, \dots, a_m を並べたベクトル $\mathbf{a} = (a_i) \in \mathbb{R}^m$ を設計変数とする. トラス全体の変位の自由度を n , 変位を $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ で表す. このとき, 第 i 部材に蓄えられるエネルギー (ひずみエネルギー) は, 単位体積あたり,

$$\pi_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i^\top \mathbf{u})^2$$

で与えられる. ここで, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n$ は定ベクトルである. 第 i 部材の長さを l_i で表す (微小変形を考えているので, l_i は定数とみなしてよい). このとき, 部材全体に蓄えられるエネルギーは $a_i l_i \pi_i(\mathbf{u})$ と書ける.

次に, トラスに外力 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ が作用するとき, 全ポテンシャルは,

$$\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m a_i l_i \pi_i(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^\top \mathbf{u}$$

で与えられる. 釣合状態では, $\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ が \mathbf{u} に関して最小となる.

例えば, 図1のトラスの場合は $n = 8$ であり, ベクトル \mathbf{u} の各成分は図中の矢印に従って定義する. また, 図2の矢印のような外力を想定すると,

$$\mathbf{f} = (0, -100, 0, -150, 0, 0, 0, 0)^\top$$

である. 対応する釣合状態を図2に示す.

外力 $\mathbf{f} (\neq \mathbf{0})$ が与えられたとき, 次式で定義される量 $w(\mathbf{a})$ をコンプライアンスという:

$$w(\mathbf{a}) = -2 \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{a}, \mathbf{u}).$$

コンプライアンスは, 釣合状態において構造物全体に蓄えられるエネルギーの2倍に等しいことを示すことができる. 従って, 構造物を設計する際, 通常は, 与えられた外力 $\mathbf{f} (\neq \mathbf{0})$ に対して, コンプライアンスをできるだけ小さくすることが望ましい. そこで, $V_0 > 0$ を部材の総体積の上限値として, 次のような設計問題 (コンプライアンス最小化問題) を考える:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m} \quad & w(\mathbf{a}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{l}^\top \mathbf{a} \leq V_0, \mathbf{a} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

図2で与えた外力 \mathbf{f} に対するコンプライアンス最小化問題の最適解の例を, 図3に示す.

以下の設問 (1)–(3) に答えよ.

- (1) コンプライアンス $w(\mathbf{a})$ は凸関数であること, すなわち, 任意の $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^m$ に対して,

$$w(\lambda \mathbf{a}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{a}_2) \leq \lambda w(\mathbf{a}_1) + (1 - \lambda) w(\mathbf{a}_2) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

が成り立つことを示せ.

- (2) \mathbf{a} が与えられたとき, 釣合状態における変位 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ は,

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{a}, \mathbf{u})$$

を達成する \mathbf{u} として与えられる. このとき, 部材断面積に対するコンプライアンスの感度 $\frac{\partial w}{\partial a_i}$ は,

$$\frac{\partial w}{\partial a_i} = -l_i (\mathbf{b}_i^\top \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{a}))^2$$

と表せることを示せ.

- (3) コンプライアンス最小化問題の最適解を $\mathbf{a}^* = (a_i^*)$ とおく. このとき, コンプライアンス最小化問題の最適解が満たす Karush-Kuhn-Tucker 条件を導くことにより, $a_i^* > 0$ であるような部材の単位体積あたりのひずみエネルギー $\pi_i(\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{a}^*))$ は i によらず一定であることを示せ.

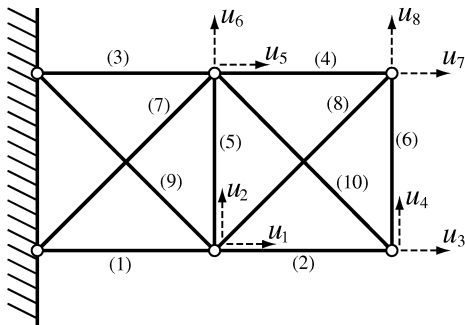


図 1. トラスの例 ($m = 10, n = 8$)

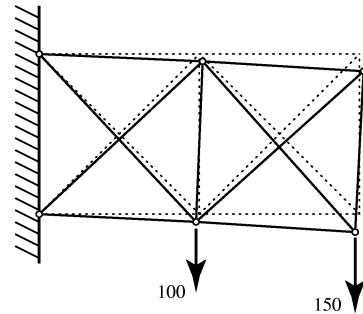


図 2. 外力 \mathbf{f} と釣合状態 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ の例

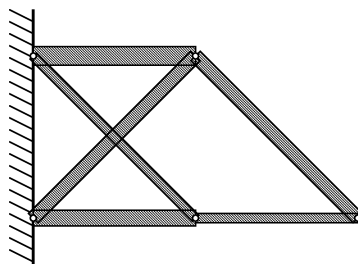


図 3. コンプライアンス最小化問題の最適解の例

(最適解において断面積が 0 となり, 除去された部材がいくつかあることに注意)

第5問

x - y 平面上に M 個の相異なる円 C_1, C_2, \dots, C_M と N 本の相異なる直線 L_1, L_2, \dots, L_N がある. 円 C_i と直線 L_j との交点数を K_{ij} , それらの総和 $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N K_{ij}$ を K と記す. 例えば, 図1, 2, 3 に示す例では, それぞれ $K = 7, 15, 10$ となる. 本問では, この交点数 K を計算する問題を考える. ただし, 円 C_i は, 中心の座標 (s_i, t_i) と半径 $r_i (> 0)$ で与えられ, 直線 L_j は, $a_j x + b_j y = d_j$ の係数 a_j, b_j, d_j で与えられるものとする.

各円と各直線の交点数 K_{ij} を単純に足し合わせる方法を用いると $O(MN)$ 時間で解けることは容易に分かる. 以下では, より効率的なアルゴリズムの設計を考える. 以下の設問 (1)–(3) に答えよ.

- (1) 図1のような点 $(0, 0)$ を中心とする同心円と y 軸に平行な直線の場合を考える. ただし, 円の半径は, $r_1 < r_2 < \dots < r_M$ を満たし, 直線 L_j の x 座標 $x_j (= d_j/a_j)$ は, $|x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_N|$ を満たすものとする.
- (1-1) $P_{\alpha, \beta}$ を円 $C_\alpha, C_{\alpha+1}, \dots, C_M$ と直線 $L_\beta, L_{\beta+1}, \dots, L_N$ との交点の数, すなわち, $P_{\alpha, \beta} = \sum_{i=\alpha}^M \sum_{j=\beta}^N K_{ij}$ とする. このとき, r_α と x_β との関係を条件として, $P_{\alpha, \beta}$ を $P_{\alpha+1, \beta}$ 及び $P_{\alpha, \beta+1}$ で表す式を示せ.
- (1-2) 上の性質を利用して, r_1, r_2, \dots, r_M と x_1, x_2, \dots, x_N から円と直線の交点数 K を求める線形時間アルゴリズムを設計せよ.
- (2) 図2のような同心円と (任意の) 直線の場合を考える. ただし, すべての円 C_i の中心座標は (s, t) とする. このとき, 円と直線の交点数 K を求める効率的なアルゴリズムを設計し, その時間計算量を示せ.
- (3) 図3のような (任意の) 円と y 軸に平行な直線の場合を考える. ただし, 直線 L_j の x 座標は $x_j (= d_j/a_j)$ とし, 円と直線が接することはないと仮定する. この問題に対して, まず, 円の左端と右端の x 座標 $s_i - r_i, s_i + r_i$ ($i = 1, 2, \dots, M$) と直線の x 座標 x_j ($j = 1, 2, \dots, N$) をすべて一緒にして順に $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{2M+N}$ と並べ, 次に, 並べた順番に z_i を走査することで, 円と直線の交点数 K を求める効率的なアルゴリズムを設計し, その時間計算量を示せ.

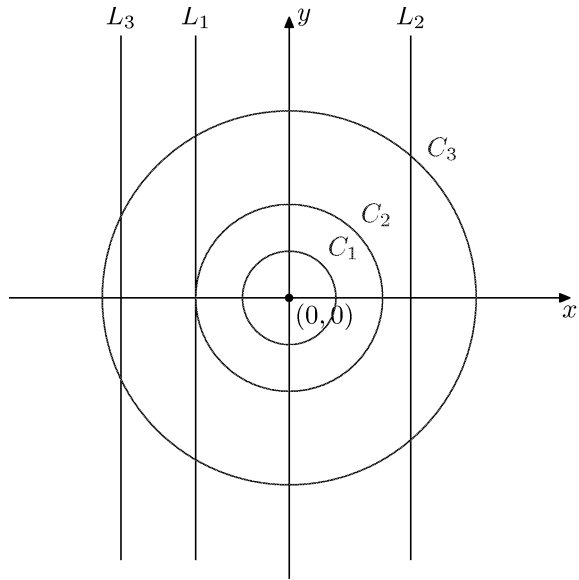


图 1. 同心円・平行線

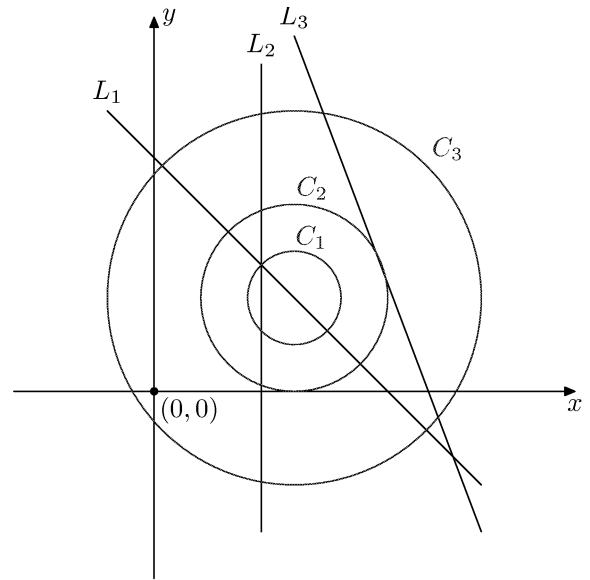


图 2. 同心円・任意直線

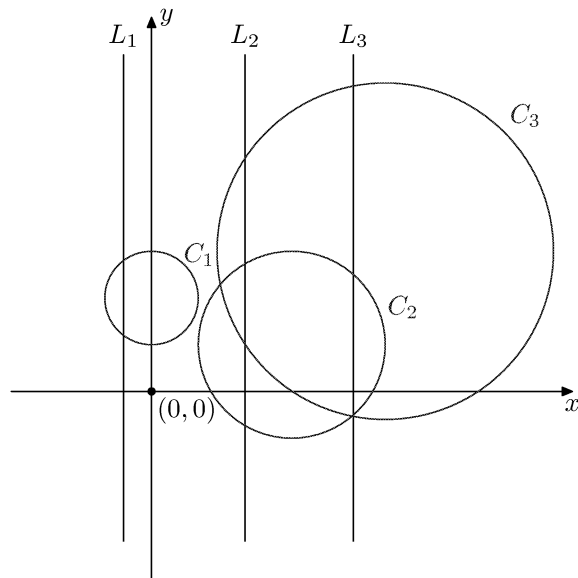


图 3. 任意円・平行線