数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成１７年８月２３日（火）　１０：００〜１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること.

(3) 答案用紙３枚が渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること.
止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい.

(4) 答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること.

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする.

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること.

第 1 問

$n \times n$ 正方行列 C_n を以下のように定義する.

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

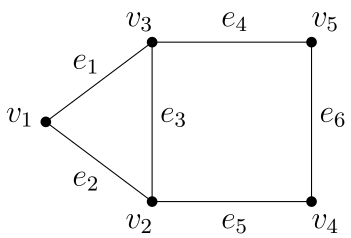
以下の設問 (1)–(4) に答えよ.

(1) n が偶数ならば，C_n は逆行列を持たないことを示せ.

(2) n が奇数ならば，C_n の列ベクトルの集合は線形独立であることを示せ.

(3) C_n が逆行列 ${C_n}^{-1}$ を持つならば，$2{C_n}^{-1}$ は整数行列であることを示せ.

(4) 無向グラフ G とその接続行列 $M(G)$ を以下のように定める.



無向グラフ G

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	1	1	0	1	0
v_3	1	0	1	1	0	0
v_4	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	0	1	0	1

接続行列 $M(G)$

$M(G)$ の列ベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_6$ の張る実線形部分空間を H とする．グラフ G の枝の部分集合で，対応する $M(G)$ の列ベクトルの集合が H の基底となっているものをすべて挙げよ.

第 2 問

以下の設問 (1)–(3) に答えよ．

(1) 実数の組 (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, n)$ からなるデータに対し，直線 $y = \beta_1 x + \beta_2$ を最小 2 乗法で当てはめることにより β_1, β_2 の推定量 $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ を求める．ここで，

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$$

とおく．ただし，X の階数は 2 であるものとする．このとき，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求めよ．また，

$$X\hat{\boldsymbol{\beta}} = P\mathbf{y}$$

を満たす，X により決まる $n \times n$ 行列 P を求め，$P^2 = P$, $P^\top = P$ が成立することを示せ．ここで，$P^\top$ は P の転置である．

(2) (1) で考えた実数の組 (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, n)$ からなるデータに，2 次曲線 $y = \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3$ を最小 2 乗法で当てはめることにより $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ の推定量 $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\gamma}_3$ を求める．ここで，

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {x_n}^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \end{pmatrix}$$

とおく．ただし，Z の階数は 3 であるものとする．このとき，

$$Z\hat{\boldsymbol{\gamma}} = Q\mathbf{y}$$

を満たす，Z により決まる $n \times n$ 行列 Q を求めよ．Q と (1) で求めた P に関して，

$$QP = PQ = P$$

が成立することを示せ．

(3) (1) で考えた実数の組 (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, n)$ からなるデータに対して，$y_1, \cdots, y_n$ が互いに独立で，各 y_i が平均 $b_1 x_i + b_2$，分散 σ^2 の正規分布に従うモデルを仮定する．未知のパラメータ b_1, b_2, σ の最尤推定量を $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{\sigma}$ とおく．このとき，$\hat{b}_1, \hat{b}_2$ と (1) の $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ に関して，

$$\hat{b}_1 = \hat{\beta}_1, \quad \hat{b}_2 = \hat{\beta}_2$$

が成立することを示せ．

第 3 問

xy-平面上の 2 点 $\mathrm{P}_1 = (0,0)$, $\mathrm{P}_2 = (a,0)$ $(a > 0)$ から 2 種類の結晶が同時に成長を始めた．P_1 からの成長は速さ 1, P_2 からの成長は速さ k $(k > 1)$ で，どちらも成長は等方的である．一方の結晶がすでに成長している領域に，もう一方の結晶の成長が入り込むことはできない．したがって，二つの結晶の成長がぶつかったところで，その方向への成長は止まり，速く成長する結晶は，もう一方の結晶の外側をまわり込んで成長する．十分な時間がたった後の二つの結晶の境界をなす曲線の極座標表示を $(r(\theta), \theta)$ とする．すなわち，偏角が θ のときの原点からの距離が $r(\theta)$ であるとする．

参考までに，$k = 2$ の場合の状況を図 1 に示した．図の細い曲線は一定時刻までに成長した領域の境界を表し，太い曲線は十分に時間がたった後の二つの結晶の境界を表す．

以下の設問 (1)–(4) に答えよ．

(1) $x \geq 0$ の領域にできる境界曲線 $(r(\theta), \theta)$ が満たす方程式を求めよ．

(2) 極座標表示された一般の曲線 $(r(\theta), \theta)$ の $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ の範囲の長さを表す積分表示式を示せ．

(3) $x \leq 0$, $y \geq 0$ の領域において，$r(\theta)$ が満たす方程式を求めよ．

(4) $r(\theta) = \alpha \mathrm{e}^{\beta\theta}$ の形の関数で，(3) で求めた方程式を満たすものを求めよ．ただし，α, β は定数である．

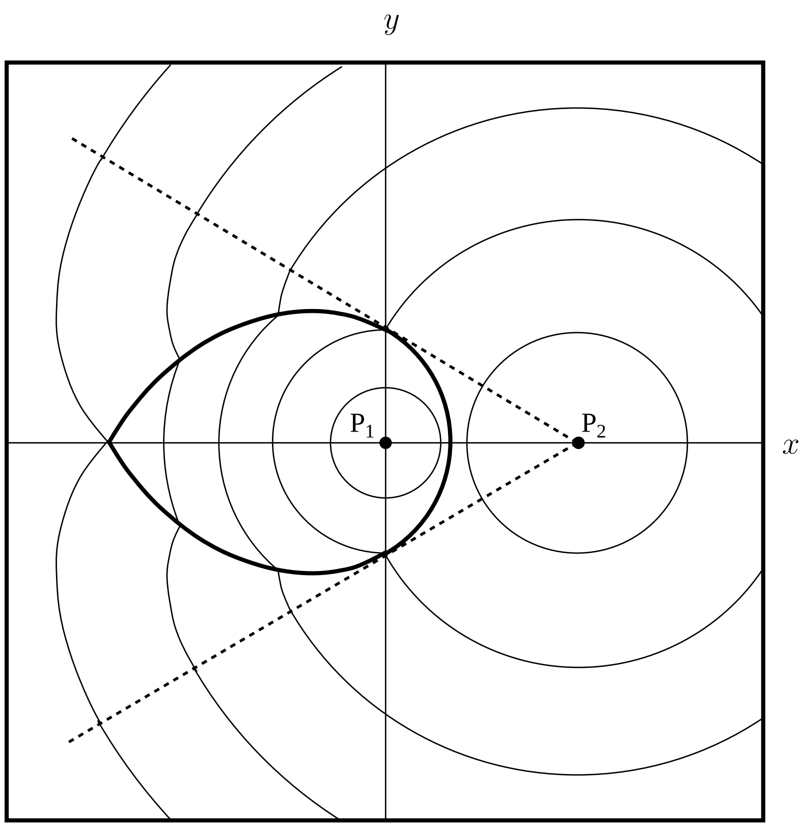


図 1. 結晶成長の様子 ($k = 2$)

第 4 問

ニューロン (神経細胞) の発火の数理モデルには，しばしば線形電気回路に放電のしきい値を導入したモデルが用いられる．このようなモデルを構築するために，図 2 に示す，容量 C のコンデンサ，抵抗値 R の抵抗，および電流源 $I(t)$ からなる線形電気回路を考える．ただし，t は時間を表す．コンデンサの両端の電圧，すなわち点 b に対する点 a の電位を $V(t)$ で表すと，その時間変化は次の微分方程式で記述される．

$$C\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{V(t)}{R} = I(t).$$

図 2 の回路の点 a と点 b の間に放電装置を接続した図 3 の回路は次のように動作する．時刻 $t = 0$ での $V(t)$ の初期値は 0 であり，$V(t)$ が $t \geq 0$ において $I(t)$ の入力を受けて変化して，その値がある時刻 T でしきい値電圧 V_{th} (ただし，$V_{\mathrm{th}} > 0$) に達すると，放電装置は短絡し，その結果，コンデンサに蓄積された電荷は瞬時に放電し，$V(T) = 0$ になる．その後 $V(t)$ は再び $I(t)$ の入力を受けて変化し，その値がしきい値 V_{th} に達すると，コンデンサが放電して，瞬時に 0 にリセットされる．以後，この動作を繰り返す．この放電がニューロンの発火に対応する．

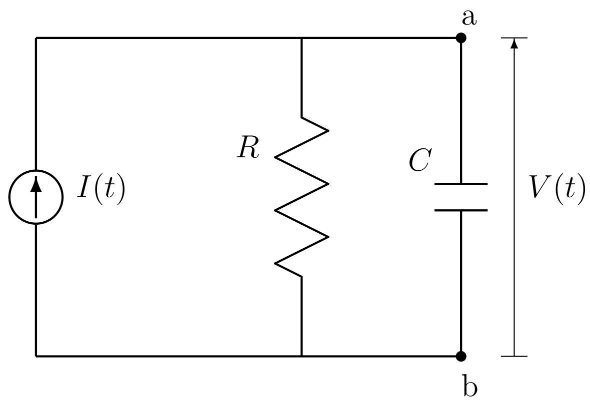


図 2. 線形電気回路

図 2，図 3 の回路に関して，以下の設問 (1)–(4) に答えよ．ただし，すべての設問において，$V(0) = 0$ とし，$t \geq 0$ における $V(t)$ を考える．

(1) 図 2 の回路において，$I(t)$ をステップ電流，すなわち，$t < 0$ で $I(t) = 0$，$t \geq 0$ で $I(t) = I_0$ とするとき，$V(t)$ を求めよ．ただし，I_0 は正のパラメータである．また，同じ $I(t)$ を図 3 の回路に入力するとき，放電を生じないために I_0 が満たすべき条件を求めよ．さらに，放電を生じる場合，最初の放電時刻 T を I_0 の関数として求め，縦軸 T，横軸 I_0 の 2 次元平面に図示せよ．

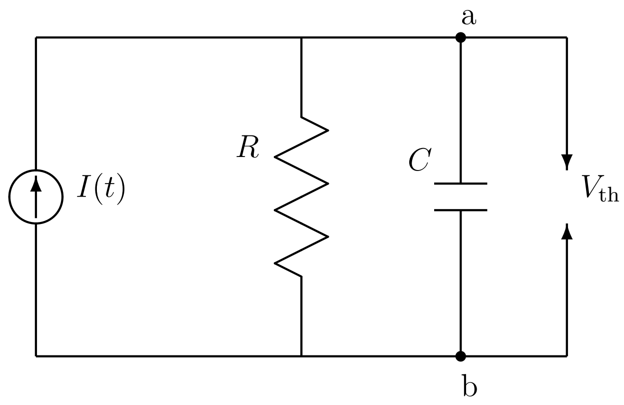


図 3. 放電モデル

(2) 図 2 の回路にインパルス電流 $I(t) = \delta(t - T_0)$ を入力した場合の $V(t)$ を求めよ．ただし，T_0 はある正の時刻，$\delta(t)$ は，$\delta(t) = 0$ ($t \neq 0$)，かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

であるディラックのデルタ関数である．

(3) 図 2 の回路にインパルス電流を周期的に反復するインパルス電流列

$$I(t) = \beta \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT_0)$$

を入力する場合を考える．ただし，β は正のパラメータである．十分長い時間がたった後の定常状態において，$V(t)$ の時間波形を図示するとともに，その最大値と最小値を求めよ．また，同じ $I(t)$ を図 3 の回路に入力した場合に，放電を生じないために β が満たすべき条件を求めよ．さらに，放電を生じる場合，最初の放電時刻 T を求めよ．

(4) 電流源 $I(t)$ が微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma^2 I(t) = 0$$

に従うとき，初期条件 $I(0) = 0,\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(0) = K$ を満たす $I(t)$ を求め，その時間波形を図示せよ．ただし，γ と K は正のパラメータとする．(この $I(t)$ は，ニューロンへの入力を記述するのにしばしば用いられる α 関数の例になっている.) 次に，この $I(t)$ を図 2 の回路に入力したときの $V(t)$ を求めよ．

第 5 問

ある遊園地では，遊園地内だけで通用する通貨があり，その単位は「両」である．この遊園地用のコイン支払機を設計したい．コイン支払機とは，利用者からの請求額に応じて，コインを適当に組み合わせて，その額を支払う機械である．

最も単純な支払い方法は，最も高額のコインから順に使って行く方法であろう．この方法を貪欲アルゴリズムという．

以下の設問 (1)–(5) に答えよ．

(1) コイン支払機に 1 両，2 両，5 両の 3 種類のコインが無限にあると仮定する．任意の請求額 N 両に対して，貪欲アルゴリズムを適用すると，コインの支払い枚数が最小となることを示せ．

(2) コイン支払機に 1 両，4 両，5 両の 3 種類のコインのみがある場合には，貪欲アルゴリズムでは，コインの支払い枚数が必ずしも最小にならないことを示せ．

(3) コイン支払機に 1 両，4 両，5 両の 3 種類のコインが無限にあると仮定する．任意の請求額 N 両の支払いに要するコインの最小枚数を計算する動的計画法のアルゴリズムを与えよ．

(4) 合計額 N 両のコインをコイン支払機に入れる．支払機に入れたコインの中で一番高額のものを m 両コインとし，j 両コインの枚数を c_j とする ($j = 1, \ldots, m$)．このとき，合計額が N 両以下の K 回の任意の支払いができるためには，$m \leq \lceil N/K \rceil$ であり，かつ

$$\sum_{j=1}^{i} j c_j \geq Ki \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1) \qquad (*)$$

でなければならないことを示せ．ただし，$\lceil N/K \rceil$ は，N/K 以上の整数で最小のものを表す．

(5) 上記 $(*)$ の条件が成立するときに，N 両以下の任意の請求額に対して，貪欲アルゴリズムで支払いを行う．その直後の支払機中で最も高額なコインの額を l 両として，残っている j 両コインの枚数を d_j とする ($j = 1, \ldots, l$)．このとき，

$$\sum_{j=1}^{i} j d_j \geq (K-1)i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l-1)$$

となることを示せ．このことから，$(*)$ が成立するときに，合計額が N 両以下の K 回の任意の支払いができることを示せ．