

# 出題の意図

## 第1問

線形代数の基本的な知識および、その知識とグラフ・ネットワーク理論との関わりを問う問題です。線形代数は、数理情報学専攻で扱う様々な分野における基礎の一つであり、その応用の一つとしてグラフ・ネットワーク理論があります。出題された問題の背後には、グラフの接続行列の構造に関する性質が潜っていますが、それらの知識がなくとも解けるように、問題は設定されています。各小問の出題の意図は以下の通りです。

- (1), (2) 正方行列が逆行列をもつことと、列ベクトル集合が線形独立であることが同値であることを知っていれば、容易に解ける問題です。
- (3) 逆行列について問うものです。単純な証明としては、 $2C_n x$  が単位ベクトルとなる  $x$  が整数ベクトルであることを示せば十分です。逆行列の定義と、行列式の値を与える式から証明するという、正攻法で解くこともできます。
- (4) 行列  $C_n$  が無向グラフの閉路の接続行列であることに着目する問題です。 $C_n$  が逆行列を持つ必要十分条件が閉路長が奇数であることがポイントです。

## 第2問

統計学の基礎に関する問題です。各小問の出題の意図は以下の通りです。

- (1) 最小2乗法で直線をデータに当てはめるといふ、広く利用されている手法の幾何学的な意味に関する問題です。最小2乗法は、データのベクトル  $y$  を行列  $X$  の列ベクトルの張る線形部分空間へ射影することにより、モデルの当てはめを行っている、ととらえることができます。 $P^2 = P, P^T = P$  を満たす実行列は射影行列と呼ばれ、 $P y$  は  $P$  の列ベクトルの張る線形部分空間へのベクトル  $y$  の射影になります。
- (2) (1) に引き続き最小2乗法の幾何学的な意味に関する問題です。行列  $X$  の列ベクトルの張る線形部分空間が、行列  $Z$  の列ベクトルの張る線形部分空間の部分空間になっていることの意味の理解をしています。
- (3) 統計学で大変重要で基本的な、正規分布と最尤法の理解を問う問題です。最尤推定量の意味を理解していれば、最小2乗法により得られる推定量と一致することが示せます。

### 第3問

数理情報学においては、数理的に表現された問題を解く力だけではなく、現象を数理モデルとして記述する力も同様に大切です。この問の意図は、文章で表現された現象を数理モデルに書きなおす力を見ることです。すなわち、小問(3)に答えられるかどうかを最も見たかったことです。

### 第4問

生命情報システムは、一般に非線形性がその機能発現と密接に関係しています。したがって、生命情報システムの数理モデル構築においては非線形性の記述が重要な課題となります。本問においては、脳の基本構成要素であるニューロン(神経細胞)の数理モデルを取り上げました。そして、単純な線形電気回路にしきい値を伴う放電装置という非線形性を付け加えたニューロンモデルを用いて、様々な入力に対するニューロンの応答特性を計算する問を出題しました。線形微分方程式を解く力とその結果を基に非線形効果を考慮するセンスの両方が重要です。この問題に見られるように、非線形な生命情報システムを研究するためには、線形解析を十分に使いこなす解析力が基礎となります。

### 第5問

前半3問はアルゴリズム設計に関する基本問題です。(1)と(2)は貪欲アルゴリズムが最適解を与えるための条件を理解しているかをみる問題で、(3)は、単純な状況で動的計画法を適用できるかをみる問題です。

後半2問は貪欲アルゴリズムの考え方を実際の問題に応用する力を見る問題です。(4)は、「コイン支払機」に内在する重要な「不変的性質」を解析できるか、(5)は、この「不変的性質」を実際アルゴリズム設計に応用できるかをみようとしています。