数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成１５年８月２６日（火）　１３：００～１６：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること.

(3) 答案用紙３枚が渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること.
止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい.

(4) 答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること.

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする.

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること.

第 1 問

ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ で，$p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ であるものを確率ベクトルという．確率ベクトル $\boldsymbol{p}$ のエントロピー $H(\boldsymbol{p})$ を

$$H(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

で定義する．ただし，$0 \log 0 = 0$ とする．また，確率ベクトル $\boldsymbol{p}$ の成分のうち大きい方から k 個の和を $\sigma_k(\boldsymbol{p})$ と書くことにする．

正方行列 $A = (a_{ij} \mid i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n)$ で，

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n), \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} &= 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} &= 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

を満たすものを二重確率行列という．

以下の設問に答えよ．

(1) 確率ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ と二重確率行列 A が $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}A$ を満たすとき，$H(\boldsymbol{q}) \geq H(\boldsymbol{p})$ となることを示せ．

(2) 確率ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ と二重確率行列 A が $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}A$ を満たすとき，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\sigma_k(\boldsymbol{q}) \leq \sigma_k(\boldsymbol{p})$ となることを示せ．

(3) 確率ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ が $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\sigma_k(\boldsymbol{q}) \leq \sigma_k(\boldsymbol{p})$ を満たすとき，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}A$ である二重確率行列 A が存在することを示せ．

第 2 問

実 n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ において，あるベクトル $\boldsymbol{c}$ とある正定値対称行列 A によって $\{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^\top A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) \leq 1\}$ と表される図形を楕円体といい，$\boldsymbol{c}$ をその中心と呼ぶ．ただし，$^\top$ はベクトルの転置を表す．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と表すことにする．

原点を中心とした楕円体 E を，原点を通る超平面 H で切断して二つに分け，その一方を K とする．K を含む体積最小の楕円体 F の体積 $\mathrm{vol}(F)$ と E の体積 $\mathrm{vol}(E)$ の比を $\rho = \mathrm{vol}(F)/\mathrm{vol}(E)$ とおく．

以下の設問に答えよ．

(1) E, H, K が

$$
\begin{aligned}
E &= \{\boldsymbol{x} \mid \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \leq 1\}, \\
H &= \{\boldsymbol{x} \mid x_n = 0\}, \\
K &= \{\boldsymbol{x} \mid \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \leq 1, x_n \geq 0\}
\end{aligned}
$$

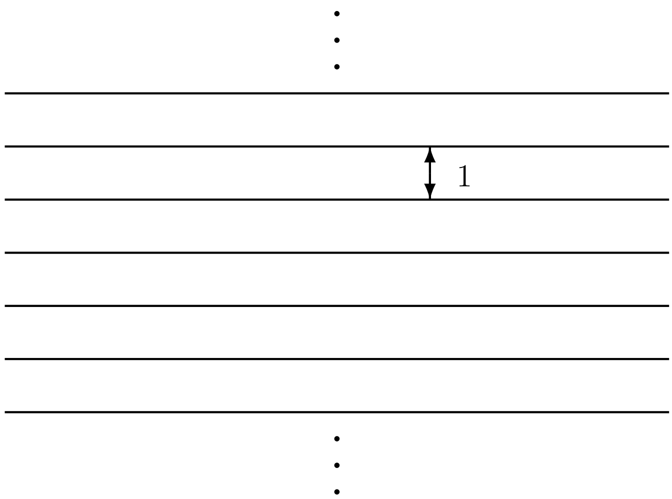
の場合に，F の中心と ρ の値を求めよ．

(2) 上で求めた ρ に関して，$n \to \infty$ のとき $\log \rho$ が 0 に収束することを示し，さらに，その収束の速さを論ぜよ．

(3) 一般の場合の E, H に対して，ρ が E, H に依らず，n だけの関数であることを説明せよ．

第 3 問

(1) 図のように平面上に平行な直線が等間隔に引かれている．隣り合う 2 直線の間隔を 1 とする．この平面上に長さ 1 の針をランダムに投げる．針が直線群と交わる確率 p を求めよ．



(2) 針を n 回投げ，針が直線群と交わった回数 X を記録する実験を行う．X/n の分散を求めよ．$\sqrt{n}\left(\dfrac{X}{n}-p\right)$ の従う分布は，$n \to \infty$ のときどのような分布に収束するか．

(3) 1 辺の長さが 1 の正 m 角形 $(m \geq 3)$ を平面上にランダムに投げる．正 m 角形の周と直線群との交点の個数 Y の期待値を求めよ．

第 4 問

一般に，同じ大きさの正方行列 P, Q に対して，記号 $[P, Q]$ は，行列 $PQ - QP$ を表すものとする．

同じ大きさの実対称行列 A, B に対し，実行列 $U(t)$ に関する微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) &= [A, U(t)BU(t)^\top]\, U(t), \\ U(0) &= I \end{aligned}$$

を考える．ただし，I は単位行列，$^\top$ は行列の転置である．

以下の設問に答えよ．

(1) 任意の $t > 0$ に対して $U(t)^\top U(t) = I$ であることを示せ．

(2) 行列 $X(t) = U(t)BU(t)^\top$ は，任意の $t > 0$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}(AX(t)) = \mathrm{Tr}\big([A, X(t)]\, [A, X(t)]^\top\big)$$

を満たすことを示せ．ただし，Tr は行列のトレース (対角成分の和) である．

(3) 任意の $t > 0$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}(AX(t)) \geq 0$$

であり，$t \to \infty$ の極限において

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}(AX(t)) \to 0$$

となることを示せ．

(4) A が相異なる実数を対角要素とする対角行列であるとき，$t \to \infty$ の極限において $X(t)$ が B の固有値を対角成分とする対角行列に収束することを示せ．

第 5 問

円周上に N 個の点があるとする $(N \geq 4)$．その中の一つの点から始めて，時計回りに順に $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{N-1}$ とする．円の中心を原点とする正規直交座標系における各点 P_i の座標 (x_i, y_i) がいずれも有理数であって，これらが与えられているものとする．次のそれぞれの問題に対して，N に関して線形時間のアルゴリズムを設計せよ．ただし，有理数同士の加減乗除および大小比較は単位時間で実行できるものとする．

(1) $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{N-1}$ の中に円の直径の両端点となる 2 点が存在するかどうかを判定する問題.

(2) $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{N-1}$ の中の 4 点を頂点とする長方形が存在するかどうかを判定する問題.

(3) $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{N-1}$ の中の 4 点を頂点とする長方形の中で面積が最大となるものを求める問題.