数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成１４年８月２７日（火）　１３：００〜１６：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
(3) 答案用紙３枚が渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．
(4) 答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

第 1 問

　正定値対称行列 X に実数を対応させる関数

$$f(X) = \log(\det X)$$

を考える (det は行列式を表し，log は自然対数を表す)． n 次正定値対称行列 A, B に関する不等式

$$f(A) + f(B) \leq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right) \tag{$*$}$$

について，以下の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $n = 1$ のとき，$(*)$ が成り立つことを示せ．

(2) B が単位行列のときに $(*)$ が成り立つことを示せ．

(3) 一般の A, B に対して $(*)$ が成り立つことを示せ．

第 2 問

ホテルのボーイが n 人の客からそれぞれ帽子をあずかったが，誰の帽子であるかの記録をなくしてしまったため，でたらめに帽子を返すこととした．この状況で自分の帽子を正しく返してもらえる客の数を X_n とし，$X_n = k$ となる確率を $p_n(k)$ と表す．以下の (1), (2), (3), (4) に答えよ．

(1) X_n の期待値と分散を計算せよ．

(2)

$$p_n(0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)$$

となることを示せ．

(3) 各 $k = 1, \dots, n$ について

$$p_n(k) = \frac{1}{k!}p_{n-k}(0)$$

となることを示せ．ただし $p_0(0) = 1$ と定義する．

(4) 各 $k = 0, 1, 2, \dots$ について

$$p_n(k) \to \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} \qquad (n \to \infty)$$

となることを示せ．

第 3 問

k 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を変数とする線形計画問題

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{P}_k) & \text{minimize} & x_1 + x_2 + \cdots + x_k & \\
 & \text{subject to} & kx_1 & \geq 1, \\
 & & x_1 + kx_2 & \geq 1, \\
 & & x_1 + x_2 + kx_3 & \geq 1, \\
 & & \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \ddots & \vdots \\
 & & x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + kx_k & \geq 1
\end{array}
$$

について，以下の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) 線形計画問題 (P_k) の双対問題を示せ．

(2) 線形計画問題 (P_k) の最適値 α_k を求めよ．

(3) α_k が k に関して単調減少であることを示し，$\lim_{k \to \infty} \alpha_k$ を求めよ．

第 4 問

xyz 正規直交座標系の固定された 3 次元空間において，x 軸を軸とする半径 a の円柱を $-a < x < a$ の範囲に限定したものの側面を C とする．すなわち

$$C = \{(x, y, z) \,|\, y^2 + z^2 = a^2,\ -a < x < a\}$$

である．また，$f(x)$ を，$-a < x < a$ で定義され $0 < f(x) \leq a$ を満たす微分可能な関数とし，曲線

$$y = f(x), \quad z = 0$$

を x 軸のまわりに回転して得られる回転面を S とおく．すなわち

$$S = \{(x, y, z) \,|\, y^2 + z^2 = f(x)^2,\ -a < x < a\}$$

である．C 上の 1 点 p に対して，p から x 軸へ下ろした垂線と S との交点 (すなわち，p と垂線の足とを結ぶ線分が S と交わる点) を $h(p)$ で表す．C 上に一様な密度 d で発生させた点を写像 h で写したとき，S 上にもそれと同一の密度 d の点分布 が得られた．このとき以下の (1), (2) に答えよ．

(1) $f(x)$ が満たすべき微分方程式を導け．

(2) 回転面 S の一般的な形を求めよ．

第 5 問

環状の道路に，N 軒のガソリンスタンドが時計回りに 1 から N まで番号づけられて並んでいる．燃料タンクが空の状態から出発し，途中でガソリンが不足することなく車でこの環状道路を時計回りに一周したい．ガソリンスタンド i では p_i リットルのガソリンが補給される．ガソリンスタンド i から次のガソリンスタンドまで移動するのに q_i リットルのガソリンを消費する．ここで

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} q_i$$

が成り立っているとする．ガソリンスタンド i から時計回りに ガソリンスタンド j に至る経路上のガソリンスタンドの集合 (ただし i は含み j は含まない) を S_{ij} とし，

$$\mathrm{gain}(i,j) = \sum_{k \in S_{ij}} (p_k - q_k)$$

とおく．このとき，以下の (1), (2) に答えよ．

(1) ガソリンスタンド 1 から出発して，一周して出発点まで戻れるための必要十分条件を，gain を用いて表せ．

(2) 適当なガソリンスタンドが存在し，そこを出発点として一周できることを示せ．