数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成１３年８月２８日（火）　１３：００～１６：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
(3) 答案用紙３枚が渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．
(4) 答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

第 1 問

X, Y を区間 $[0,1]$ 上の互いに独立な一様乱数とする．$0 < c < 1$ を満たす c に対し，確率変数 Z_c を

$$Z_c = \begin{cases} X, & X \geq c \text{ の時}, \\ Y, & \text{その他}, \end{cases}$$

と定義する．すなわち Z_c は X が c 以上ならば満足して止め，c 未満ならば不満としてさらに Y を観測することにあたる．同様に区間 $[0,1]$ の部分集合 A に対し，確率変数 Z_A を

$$Z_A = \begin{cases} X, & X \in A \text{ の時}, \\ Y, & \text{その他}, \end{cases}$$

と定義する．以下の (1)，(2)，(3) に答えよ．

(1) Z_c の確率密度関数および期待値 $\mathrm{E}[Z_c]$ を求めよ．
(2) $\mathrm{E}[Z_c]$ を最大にする c の値 c^*，および最大値 $\mathrm{E}[Z_{c^*}]$ を求めよ．
(3) 任意の A に対して $\mathrm{E}[Z_{c^*}] \geq \mathrm{E}[Z_A]$ となる事を示せ．

第 2 問

凸錐 S_n を $S_n = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathrm{R}^{n+1} \,\middle|\, x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \right\}$ と定義する．以下の (1)，(2)，(3)，(4)，(5) に答えよ．

(1) 凸錐 S_2 の形状はどのようなものか答えよ．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^{n+1}$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \notin S_n \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{y} \in S_n, \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} < 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) 行列 $A \in \mathrm{R}^{m \times n}$ とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^m$ が与えられたとする．変数 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^\top$ に関する凸 2 次計画

$$\text{min. } z_1^2 + \cdots + z_n^2 \quad \text{s.t. } A\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}$$

の Karush-Kuhn-Tucker 条件 (Kuhn-Tucker 条件とも呼ばれる) を書け．

(4) 領域 $\{\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathrm{R}^{n+1} \mid A\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{b},\ \overline{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_n)^\top,\ x_0 = r\}$ を X_r とする．いま $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} > r||A^\top \boldsymbol{y}||$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ が存在すると仮定する．ベクトル $(||A^\top \boldsymbol{y}||, -\boldsymbol{y}^\top A)^\top$ が凸錐 S_n に含まれることを用いて，$S_n \cap X_r = \emptyset$ が成り立つことを示せ．ただし $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^\top$ に対し，$||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$ である．

(5) (4) で定義された領域 X_r が，$r > 0$ と $X_r \neq \emptyset$ を満たすとする．このとき

$$S_n \cap X_r = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} > r||A^\top \boldsymbol{y}||$$

が成り立つことを示せ．

第 3 問*

以下の等式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=2$$

*この問題には出題時に不備がありましたが，ここでは修正してあります.

第 4 問

半径 R の円柱の側面に沿って，水平面と α の角度をもち，幅が D のすべり台を作りたい．図 1 に示すように，円柱側面の展開図に描いた角度 α の直線を ℓ' とし，ℓ' を円柱面にもどして得られる曲線を ℓ とする．図 2 に示すように，ℓ 上の動点 P から円柱面に垂直に立てた長さ D の線分を $\overline{\mathrm{PS}}$ とする．P が ℓ 上を動くとき，線分 $\overline{\mathrm{PS}}$ が掃く曲面がすべり台の床板となる．この床板を鉄板で作ることに関連して以下の (1), (2), (3), (4), (5) に答えよ．

(1) 図 2 に示すように，円柱の軸を z 軸に一致させ，曲線 ℓ が点 $(R, 0, 0)$ を通るように (x, y, z) 直交座標系を定める．点 $(R, 0, 0)$ から点 P まで ℓ に沿って測った弧長を s とする．P の (x, y, z) 座標を s を用いて表せ．

(2) 曲線 ℓ の曲率半径 R' を求めよ．

(3) 線分 $\overline{\mathrm{PS}}$ 上で P から距離 u だけ離れた点を Q とする．P が ℓ に沿って距離 s だけ動いたとき，Q が動く距離 t を求めよ．

(4) すべり台の床板を作るために，図 3 に示すように，半径 R' と半径 $R' + D$ の同心円弧で囲まれた帯状に鉄板を切断する．鉄板に変形を加えない状態で，この円弧の中心を O′ とし，内側の円弧上の点を P とし，半直線 O′P 上で P から O′ と反対側へ距離 u だけ離れた点を Q′ とする．P が内側の円弧上を弧長 s だけ動くとき，Q′ が動く距離 t' を求めよ．

(5) この鉄板の内側の円弧を曲線 ℓ に沿わせて目的の床板を作るために，この鉄板をたたいてのばす．ただし，円弧方向にひっぱりながらたたくので，鉄板は半径方向にのびず，円弧に沿った方向へのみのびるものとする．目的の床板ができあがったとき，P から u だけ外側へ離れた点 Q での鉄板の厚みと点 P における鉄板の厚みとの比を求めよ．

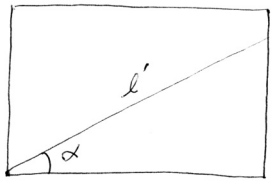

図 1

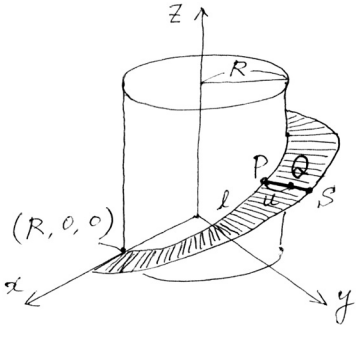

図 2

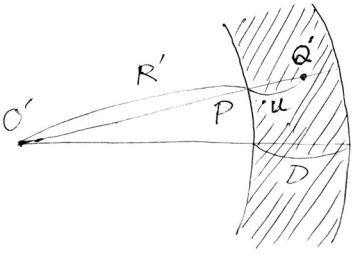

図 3

第 5 問

初期状態が空であるスタックを用いて数字列を置換することを考える．スタックに対して，二つの操作「入力側の数字列の先頭の一つの数字をスタックに入れる」と「スタックから一つの数字を取り出して印字する」があり，それぞれの操作を S と X で表す．S と X を並べた列を操作列という．例えば，入力数字列 1234 に対して，SSXSSXXX という操作列の操作を左から右に順に作用させると，数字列 1234 は 2431 に置換されて印字される．

以下の (1)，(2)，(3) に答えよ．

(1) 数字列 1234 からスタックを用いて置換できる数字列をすべて列挙せよ．

(2) 数字列 $12\ldots n$ を数字列 $p_1p_2\ldots p_n$ に，スタックを用いて置換できるための必要十分条件は，$p_j < p_k < p_i$ を満たす添字 $i < j < k$ が存在しないことであることを証明せよ．

(3) 以下の二つの問題

(i) 操作列 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\ldots\mathrm{O}_m$ $(\mathrm{O}_i \in \{\mathrm{S}, \mathrm{X}\})$ を数字列 $12\ldots n$ $(n \geq m)$ に作用させて出力される数字列を求める問題,

(ii) 数字列 $12\ldots n$ を $p_1p_2\ldots p_n$ に置換する操作列を生成する問題

を解くアルゴリズムを設計し，そのプログラムを書け．また，それらのアルゴリズムの計算量を評価せよ．