CAT(0) 性を持つ立方複体上の最短経路問題のアルゴリズムに関する研究

数理情報学専攻 48-146204　上田 英明
指導教員　平井 広志 准教授

1　はじめに

本論文で対象にする最短経路問題とは，グラフ上の最短パスではなく，ユークリッド空間の立方体を貼り合わせることで得られる連続的な距離空間（立方複体）X 上の最短パスを求める問題である．この場合，最短パスは各立方体内部の線分をつなぎ合わせた形状をしている．X が 2 次元の空間であれば比較的容易な場合が多いが，3 次元では多項式時間でも解くことが難しい場合が多く，4 次元以上はほとんど手付かずである．

問題の難しさを決める X の性質として重要な性質として，空間の各点で曲率が非正であることを指す，CAT(0) 性という概念がある．葉の個数を固定した際の系統樹の空間やロボットモーションの状態空間が CAT(0) 立方複体としてモデリングできることが実応用として知られている．Owen-Provan[4] は木空間上の最短パスを求める多項式時間アルゴリズムを構成した．Ardila-Owen-Sullivant[1] は，一般次元の CAT(0) 立方複体上の最短経路問題を解くアルゴリズムを与えた（以下 AOS アルゴリズムと呼ぶ）．しかしこれが多項式時間アルゴリズムであるかはわかっていない．

2　本論文の目標，成果

本論文では，一般の CAT(0) 立方複体上の最短経路問題に対する多項式時間アルゴリズムの構成を目指し，その第一歩として，3 次元の場合を考察した．AOS アルゴリズムに着目した上で，3 次元特有のある組合せ的特徴量のみに依存する計算時間で実行可能な，既存のものとは異なる新しいアルゴリズムを構築した．

3　CAT(0) 立方複体

CAT(0) 空間の主な性質として，任意の二点間の最短パスが一意，任意の局所的最短パスは最短パス，が挙げられる．但し測地的距離空間上の局所的最短パス ρ とは，ある $\epsilon > 0$ が存在し，長さ ϵ 以下の任意の ρ の部分パスがその端点間の最短パスになるパスのことをいう．

以上の性質は，CAT(0) 立方複体上の二点間最短経路問題を解く際にも有効に働く．複数の線分を端点でつないだ形状のパスに対し，そのブレークポイント（パスを構成する線分の繋ぎ目）の近傍の局所最短性を調べる．あるブレークポイントの近傍で局所最短性が崩れているならば，その近傍でパスを局所的に変形することにより，さらに短いパスを形成することができる．このような局所変形を繰り返すことでいずれ局所最短パスを得ることができるが，これは CAT(0) 性より最短パスである．すなわち，CAT(0) 空間の性質を利用すると，パスの局所最適性判定と適切な局所変形の手順を与えれば，最短経路問題のアルゴリズムを構築することができる．

CAT(0) 立方複体に関する性質としては，Gromov による組合せ的特徴づけ [3] が知られている．また，Ardila-Owen-Sullivant[1] によると，Birkhoff の表現定理を拡張することで，半順序集合を用いて CAT(0) 立方複体を表現できることがわかっている．

4　周遊問題

凸多面体に関する周遊問題を定義する．$S_1, S_2, \ldots, S_l \subset \mathbf{R}^k$ をそれぞれ定数本の線形制約で表現可能な凸領域とする．$x, y \in \mathbf{R}^k$ とする．

問題 4.1 (周遊問題) $\mathbf{R}^k$ 内 x-y パスであり，途中で $S_1, S_2, \ldots, S_l$ と順番に交差するようなパスの中で最短のものを求めよ．

この問題は次のようにも書くことができる：

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{p_i} & ||x - p_1|| + ||p_1 - p_2|| + \cdots + ||p_k - y|| \\ \text{s.t.} & p_i \in S_i. \qquad (i = 1, \ldots l) \end{array}$$

この問題は 2 次錐計画問題 (SOCP) の形式に書き直すことができる [5] ため，任意の精度で多項式時間で解くことができる．

5　AOS アルゴリズム [1]

Ardila-Owen-Sullivant は，3 節で述べた CAT(0) 立方複体上の最短経路問題に対するアルゴリズムの枠組みを提案，立方複体上の妥当キューブ列の概念を導入し

た．そして妥当キューブ列上の最短パスを求め，そのパスの元の問題領域での局所最短性を判定し，局所最短でない場合に妥当キューブ列を更新するというアルゴリズムを考えた．妥当キューブ列空間が有限であることと，パス長が単調に減少することよりこのアルゴリズムは最短パスを与える妥当キューブ列を必ず出力する．計算時間の観点からは，妥当キューブ列の更新回数が多項式で抑えられておらず，従って多項式時間アルゴリズムかどうかは未解決問題である．

6 提案アルゴリズム

AOS アルゴリズムに 3 次元の特殊性，すなわち，ブレークポイントが「枝」上にあるという性質を加味して改良することを考える．最短経路問題を考える上で，問題領域のうち，3 次元多面体と同型な部分領域 S に限定して考えればよい [1, 6]．

定義 6.1 $a, b \in \mathbf{Z}_+$ に対し $\mathbf{R}^3$ 中の**ウォール**を

$$W(a_+, b_-, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z)|x \geq a, y \leq b\} \subset \mathbf{R}^3$$

と定義する．
$W(a_+, 0, c_-), W(a_-, b_+, 0), W(a_-, 0, c_+), W(0, b_+, c_-)$, $W(0, b_-, c_+)$ も同様の定義を行う．以下も同じ．

定義 6.2 ウォール $W(a_+, b_-, 0)$ に対応する**ウォール枝**を

$$e(W(a_+, b_-, 0)) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z) \mid x = a, y = b\} \cap S \subseteq \mathbf{R}^3$$

と定義する．

ウォール，ウォール枝は，それぞれ 3 次元多面体を規定する面，枝を表す．

定義 6.3 ウォール $W(a_+, b_-, 0)$ に対応する**不可避領域**を，

$$f(W(a_+, b_-, 0)) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z) \mid x \leq a, y \geq b,$$
$$\min\{z \in e(W)|_z\} \leq z \leq \max\{z \in e(W)|_z\}\}$$

と定義する．

任意の不可避領域は，始点終点間の任意のパスと交わる．そこで，不可避領域を順番に通る周遊問題を考えることで「不可避領域順序」上の最短パスを定義，この順序に関して局所最短性を判定したり，局所最短性を満たさない場合に局所的に順序を変更することを考える．実際，次の主張が成立する．

命題 6.1 S を表すウォールの集合を $\mathcal{W}$ とする．不可避領域順序 $\sigma \in \mathrm{Sym}(|\mathcal{W}|)$ が存在し，$(f(W_{\sigma(i)}))_i$ に関する周遊問題の最適解が最短パスを与える．

先に述べたアルゴリズムの枠組みを，AOS アルゴリズムが妥当キューブ列の空間に適用したのに対し，3 次元 CAT(0) 立方複体の組合せ的性質を活かして不可避領域順序の空間に適用したのが提案アルゴリズム 1 である．不可避領域順序の更新回数が多項式で抑えられるかは不明である．しかし，AOS アルゴリズムの計算時間は空間の「長さ」に依存するのに対し，本アルゴリズムは 3 次元領域特有の組合せ的特徴量であるウォール枝の本数に依存するため，計算時間の面で有利であると考えられる．

Algorithm 1 3 次元 CAT(0) 立方複体上の最短経路問題に対する提案アルゴリズム

X の部分領域を $\mathbb{R}^3$ に埋め込み，ウォール表現に直す．
適切な不可避領域順序 σ を見つける．
$\star$ $(f(W_{\sigma(i)}))_i$ に関する周遊問題を解き，その最適解を q とする．
if q が局所最短性を満たす **then**
  終了，q を出力する．
else
  σ を適切に変更，$\star$ へ
end if

参考文献

[1] F. Ardila, M. Owen, and S. Sullivant. Geodesics in CAT(0) cubical complexes. *Advances in Applied Mathematics*, 48:142–163, 2012.

[2] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, volume 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] M. Gromov. Hyperbolic groups. In S. Gersten, editor, *Essays in Group Theory*, pages 75–265, New York, 1987. Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer.

[4] M. Owen and J. S. Provan. A fast algorithm for computing geodesic distances in tree space. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, 8:2–13, 2011.

[5] V. Polishchuk and J. S. B. Mitchell. Touring convex bodies—a conic programming solution. In *Proceedings of the 17th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 290–293, 2005.

[6] N. Reading. Order dimension, strong bruhat order and lattice properties for posets. *Order*, 19:73–100, 2002.