修士論文 要旨

ジャンプ拡散過程の確率制御に基づく再保険の最適化に関する研究

数理情報学専攻 076230　三矢恭悟
指導教員　竹村 彰通 教授

1　研究の背景

確率制御理論では，確率過程を制御し，期待効用を最大化する最適化問題を考える．これは，Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式とほぼ等価となる．ジャンプ拡散過程の確率制御が注目され [2]，工学，金融，リスク理論，再保険など，広く応用されている [1][3].

再保険とは，保険者の保険責任を，他者に転嫁する取引である．再保険は保険者のための保険と言え，経営の安定などに利用される．保険者は，再保険をサープラス過程に対する制御として生存確率を最大化する最適化問題を考えることができる．Lundberg モデルを適用すると，サープラス過程はジャンプ拡散過程となる．

本論文では，まず，ジャンプ拡散過程に対する確率制御問題を記述し，HJB 方程式や解の導出方法を述べる．そして，上記のような保険者の最適化問題を扱う枠組みを議論する．HJB 方程式の導出や数値解法の指針を提案し，具体的な問題にこれを適用する．

2　ジャンプ拡散過程の確率制御

2.1　複合 Poisson 過程

N_t を 0 時点から t 時点のクレーム件数とする．X_i を 0 時点から i 番目のクレーム 1 件の額とする．このとき，$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ は 0 時点から t 時点のクレーム総額となる．各クレーム額とクレーム件数は独立，$X_i \sim \text{i.i.d.}\ F_X$，と仮定する．また，クレーム件数過程 $\{N_t\}$ は強度 λ の Poisson 過程であるとする．このとき，$\{S_t\}$ の従う確率過程を複合 Poisson 過程といって $\mathrm{CPoPs}(\lambda, F_X)$ と記す．

2.2　Levy 過程のジャンプと確率解析

定義 2.1. $\{\mathscr{F}_t\}$-適合的な $L = \{L_t\}$ は，

$L_0 = 0$ a.s.，L は確率的連続，L は独立定常増分，

をみたすとき，Levy 過程であるという．

Levy 過程は semimartingale である．よって，確率積分が定義でき，Ito の公式も成り立つ．L の $t \geq 0$ におけるジャンプを $\Delta L_t = L_t - L_{t-}$ と定義する．さらに，$\mathscr{B}_0 = \left\{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mid 0 \notin \bar{A}\right\}$ とし，L に対し，以下のものを定義する．$t \geq 0$ と $A \in \mathscr{B}_0$ に対し，

$$N(t,A) = \sum_{0<s\leq t} 1_A(\Delta L_s) = \#\{0 < s \leq t \mid \Delta L_s \in A\}$$

を Poisson random measure という．$A \in \mathscr{B}_0$ に対し，$\nu(A) = \mathrm{E}[N(t,A)]$ を Levy measure という．また，$\tilde{N}(t,A) = N(t,A) - \nu(A)t$ を compensated Poisson random measure という．

$$\mathrm{d}U_t = b(U_{t-},t)\,\mathrm{d}t + \sigma(U_{t-},t)\,\mathrm{d}W_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma(U_{t-},t,x)\,\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$$

のような確率微分方程式には，at most linear growth, Lipschitz continuity の条件等の下で強解が一意に存在する．その解 U をジャンプ拡散過程という．

2.3　ジャンプ拡散過程に対する確率制御

制御を ρ で表し，$\mathscr{R}$ 値とする．制御される状態の時間過程を，状態過程などと呼び，U^ρ で表す．U^ρ は

$$\mathrm{d}U_t^\rho = b(U_{t-}^\rho,\rho_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(U_{t-}^\rho,\rho_t)\,\mathrm{d}W_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma(U_{t-}^\rho,\rho_{t-},x)\,\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$$

なる制御確率微分方程式に従っている．目的関数は，

$$J(u,\rho) = \mathrm{E}\left[\int_0^\tau f(U_t^\rho,\rho_t)\,\mathrm{d}t + \tilde{f}(U_\tau) \,\middle|\, U_0 = u\right]$$

という期待効用とする．ただし，τ は制御終了時刻である．$V(u) = \sup_\rho J(u,\rho)$ を値関数 (value function) という．最適値をできるだけ達成する制御 ρ を最適制御という．最適制御は Markov 制御を考えれば十分で，状態 u の関数として $\rho(u)$ と表現すれば良い．以上のように記述されたものを，確率制御問題 JD と呼ぶことにする．さて，U^ρ の生成作用素 $\mathscr{A}^\rho$ は Ito の公式より

$$\mathscr{A}^\rho\varphi(u) = b(u,\rho(u))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u,\rho(u))\varphi''(u)$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left\{\varphi(u+\gamma(u,\rho(u),x)) - \varphi(u) - \varphi'(u)\gamma(u,\rho(u),x)\right\}\nu(\mathrm{d}x)$$

となる．Bellman の最適性原理から, HJB 方程式

$$\sup_{r\in\mathscr{R}} \{f(u,r) + \mathscr{A}^r V(u)\} = 0 \tag{1}$$

を導出できる．これは，積分や sup を含む微分方程式である．最適制御 $\rho(u)$ と値関数 $V(u)$ が解である．

3　サープラス過程と再保険

3.1　サープラス過程の Lundberg モデル

サープラス = 初期サープラス + 収入保険料 − クレーム総額 と表現できる．この時間過程であるサープラス過程に対し，$U_t = u + ct - S_t$ という Lundberg モデルを適用する．ただし，u は初期サープラス，c は単

位時間当たりの収入保険料，$\{S_t\}$ は複合 Poisson 過程 $\mathrm{CPoPs}(\lambda, F_X)$ に従うクレーム総額過程である．

定義 3.1. 破産時刻を $\tau = \inf\{t \geq 0 \mid U_t < 0\}$，値が存在しない場合は $\tau = \infty$ と定義する．破産確率を $\psi(u) = P(\tau < \infty)$，生存確率を $v(u) = 1 - \psi(u)$ とする．

3.2　再保険の概要

再保険は保険者のための保険といえる．出再者は，再保険料を支払って元受保険責任の一部を受再者に移転する．再保険には様々なタイプが存在するが，比例再保険のみを紹介する．出再割合 α の比例再保険とは，受再者の保険金負担割合が α となるものである．$r = 1 - \alpha$ を保有割合という．この単位時間当たりの再保険料を $h(r)$ と記す．

4　確率制御に基づく再保険の最適化

制御の目的は生存確率の最大化とする．Lundberg モデルを適用すると，HJB 方程式は

$$\sup_{r \in \mathscr{R}} \Big\{ b(u,r)V'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u,r)V''(u) + \lambda \left(\mathrm{E}[V(u+\gamma(u,r,X))] - V(u) - V'(u)\mathrm{E}[\gamma(u,r,X)] \right) \Big\} = 0$$

となる．さらに，境界条件 $V(u) = 0 (u < 0), V(\infty) = 1$ が成り立つ．一般的な解法の指針を述べる．相互に依存する 3 つの部分に分ける．期待値，sup，微分方程式である．期待値の計算には，Monte Carlo 法を用いる．sup に由来する最適化に対しては，グリッドサーチで十分であることが多い．相互依存問題の解決には，微分方程式に陽的な数値解法を適用すれば良い．

式 (2) を満たす関数を $v(u)$ とする．アフィン変換 $\beta_1 v(u) + \beta_0$ も式 (2) を満たす．これに注目し，適当な $v(u)$ を数値計算により $\hat{v}(u)$ と求めた後, 条件に合わせて $\beta_1 \hat{v}(u) + \beta_0$ と変換を行う．それを $V(u)$ の数値解 $\hat{V}(u)$ とする．$v(u)$ の計算には，陽的な数値解法を用いる．このとき，初期値 $\hat{v}(0)$ の設定が問題となる．diffusion 項に注目して次のようにまとめることができる．ここで提案している仮想摂動法とは，直観的には，十分微小な仮想的な摂動を加えた確率制御問題を代わりに解く方法である．

1. diffusion **消去不能**:　$\hat{v}(0) = 0 \to \hat{V}(u) = \dfrac{\hat{v}(u)}{\hat{v}(\infty)}$.
2. diffusion **消去可能**:　$V(0) > 0$ となる．
   2.1 $V(0)$ **既知**:　稀なケース．アフィン変換法．
   2.2 $V(0)$ **未知**:　仮想摂動法．

初期値から $\hat{v}(u)$ を計算するには, 例えば Runge-Kutta 法のような差分法を用いる．この方法は，安定性は低いが，高速に計算を実行可能である．

4.1　比例再保険による制御

比例再保険のみを制御とする問題を考える．サープラス過程の制御確率微分方程式は

$$U_t^{\rho} = u + \int_0^t (c - h(\rho_s))\,\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} \rho_{T_i -} X_i$$

となる．これを，式 (1) の形に記述し，2.3 項に基づいて，HJB 方程式

$$\sup_{r \in [0,1]} \left\{ (c - h(r))V'(u) + \lambda \mathrm{E}[V(u - rx)] - \lambda V(u) \right\} = 0$$

を得る．初期値が未知なので，仮想摂動法を用いる．これと Runge-Kutta 法などによる数値計算のアフィン変換を用いて数値解を求める．

4.2　数値例

クレーム額 X が指数分布 $\mathrm{Exp}(1)$，対数正規分布 $X \sim \mathrm{LN}(-0.5, 1)$ に従う場合を考える．この順に裾が重くなる．解を数値計算した結果が図 1，図 2 である．裾の軽い指数分布と比べて，裾の重い対数正規分布の場合は，同じサープラスにおける最大生存確率が小さいという計算結果となった．サープラスがある程度大きくなると，比例再保険を利用するのが最適となる．

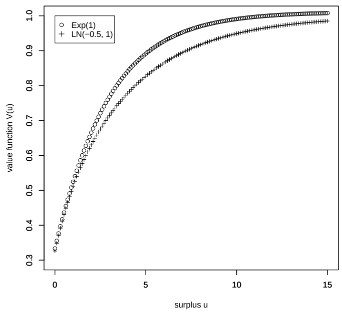

図 1. 最大生存確率

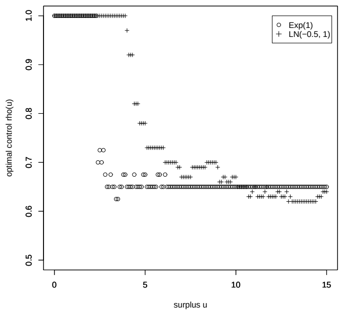

図 2. 最適保有割合

論文では他にも，摂動がある場合や，投資を許容する場合の問題を考察した．

参考文献

[1] Zhibin Liang. Optimal proportional reinsurance for controlled risk process which is perturbed by diffusion. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, Vol. 23, No. 3, pp. 477–488, 2007.

[2] Bernt Oksendal and Agnes Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[3] Hanspeter Schmidli. Optimisation in non-life insurance. *Stochastic models*, Vol. 22, No. 4, pp. 689–722, 2006.